

Aufgabe: Berechnen Sie, innerhalb welcher Krümmungen sich der überschaubare Bereich des Ereignishorizonts eines sphärischen Universums ändern kann.

Lösung: In der sphärischen Trigonometrie gilt der Kosinussatz in folgender Form,

$$\cos \frac{c}{R} = \cos \frac{a}{R} \cos \frac{b}{R} + \sin \frac{a}{R} \sin \frac{b}{R} \cos \gamma,$$

wobei R der Kugelradius ist, a , b und c die Winkel des Einheitskreises und γ der Horizontwinkel. Für kleine Winkel $a, b, c \ll R$ bzw. $R \rightarrow \infty$ können die Näherungen der Reihenentwicklungen

$$\cos \frac{c}{R} \approx 1 - \frac{c^2}{R^2}, \quad \cos \frac{a}{R} \approx 1 - \frac{a^2}{R^2}, \quad \cos \frac{b}{R} \approx 1 - \frac{b^2}{R^2}$$

und

$$\sin \frac{a}{R} \approx \frac{a}{R}, \quad \sin \frac{b}{R} \approx \frac{b}{R}$$

verwendet werden. Eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned} 1 - \frac{c^2}{R^2} &= \left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right) \left(1 - \frac{b^2}{R^2}\right) + \frac{a}{R} \frac{b}{R} \cos \gamma \\ &= 1 - \frac{a^2}{R^2} - \frac{b^2}{R^2} + \frac{a^2}{R^2} \frac{b^2}{R^2} + \frac{a}{R} \frac{b}{R} \cos \gamma \end{aligned}$$

und bei Vernachlässigung von Gliedern vierter Ordnung

$$\frac{c^2}{R^2} = \frac{a^2}{R^2} + \frac{b^2}{R^2} - \frac{a}{R} \frac{b}{R} \cos \gamma.$$

Nach Kürzung der Radian erhalten wir den Sinussatz der ebenen Trigonometrie,

$$c^2 = a^2 + b^2 - ab \cos \gamma,$$

der für rechtwinklige Dreiecke mit $\gamma = \pi/2$ in den Satz des Pythagoras übergeht:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Nach dem Winkel aufgelöst ergibt die allgemeine Formel den Ausdruck

$$\cos \gamma = \frac{\cos \frac{c}{R} - \cos \frac{a}{R} \cos \frac{b}{R}}{\sin \frac{a}{R} \sin \frac{b}{R}}.$$

Ohne eine feste Beziehung zwischen a , b und c ist die Gleichung nicht lösbar. Wir wählen daher $a = b = c$, was einem symmetrischen Horizontdreieck entspricht, und erhalten γ als Funktion von c und R :

$$\cos \gamma = \cos \frac{c}{R} \frac{1 - \cos \frac{c}{R}}{1 - \cos^2 \frac{c}{R}} = \frac{\cos \frac{c}{R}}{1 + \cos \frac{c}{R}}.$$

Setzen wir nun für c die Plancklänge l_p zur Planckzeit t_p ein, ergibt sich ein zeitabhängiger sphärischer Radius von $R(t) = l_p + c(t - t_p)$, wobei c nun die Lichtgeschwindigkeit angibt. Dabei ist $R(t_p) = l_p$ der minimale Radius und

$$R(T_G) = l_p + c(T_G - t_p) = l_p - ct_p + cT_G = R_G$$

der maximale Radius, der gleich dem Gravitationsradius $R_G = cT_G$ zum Endzeitpunkt T_G ist, über den hinaus keine Zeit existiert. Diese Zeit entspricht dem maximal erreichbaren Alter des Universums. Setzen wir den zeitabhängigen Radius des Weltalls in die Bestimmungsgleichung für den überschaubaren Winkelbereich des Ereignishorizonts ein, ergibt sich folgende Abhängigkeit:

$$\gamma(t) = \arccos \frac{\cos \frac{l_p}{R(t)}}{1 + \cos \frac{l_p}{R(t)}} = \arccos \frac{\cos \frac{l_p}{l_p + c(t - t_p)}}{1 + \cos \frac{l_p}{l_p + c(t - t_p)}}.$$

Bei minimaler Raumausdehnung entspricht dies

$$\gamma(t_p) = \arccos \frac{\cos \frac{l_p}{l_p}}{1 + \cos \frac{l_p}{l_p}} = \arccos \frac{0,54030231}{1,54030231} = 69,5^\circ.$$

Bei maximaler Raumausdehnung erhalten wir den Wert für ein vollkommen flaches Universums von

$$\gamma(T_G) = \arccos \frac{\cos \frac{l_p}{R_G}}{1 + \cos \frac{l_p}{R_G}} \arccos \frac{1}{2} = 60^\circ.$$

Wenn der Raum bei der Plancklänge beginnt und sich ausdehnt, wird die Geometrie immer flacher. Flachheit bedeutet einfach, dass der Raumradius sehr groß geworden ist. In unserem Fall kann die Raumausdehnung den Gravitationsradius nicht überschreiten, es kann nicht noch flacher werden als im euklidischen Fall. Das setzt der Ausdehnung natürliche Grenzen.

Mathematikaufgabe 193

Im Grenzfall maximaler Krümmung bei kleinstem Radius ist $R_{\min} = R(t_p) = l_p$ und

$$K_{\max} = \frac{1}{l_p} = 6,19 \times 10^{34} \text{ m}^{-1}.$$

Dazu gehört der größere Winkel $\gamma_{\max} \approx 69,5^\circ$. Im anderen Grenzfall eines vollkommen flachen Universums ist die minimal erreichbare Krümmung $K_{\min} \approx 0$. Das entspricht dem kleineren Winkel von $\gamma_{\min} \approx 60^\circ$. Darüber und darunter ist das Modell nicht definiert.