

Aufgabe: Beweisen Sie, daß die Quantenmechanik falsche Aussagen zur Nichtlokalität macht.

Lösung: Sei A die Messung von Alice und B die Messung von Bob, die aus der Messung von Alice folgt:

$$A \Rightarrow B.$$

Für die Meßergebnisse gibt es gemäß nachfolgender Tabelle für die Implikation 4 Möglichkeiten, wie die Wahrheitswerte der Messung ausfallen könnten:

| A | B | $A \Rightarrow B$ |
|-----|-----|-------------------|
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | w |
| f | f | w |

Gefordert wird nun für verschränkte Zustände, daß das Meßergebnis von Alice nicht dasselbe sein darf wie das von Bob. Wenn Alice z.B. den Zustand Spin-up mißt, dann muß Bob den Zustand Spin-down messen und umgekehrt.

Wenn man bei einer quantenmechanischen Messung das Ergebnis von A kennt und den Meßprozeß $A \Rightarrow B$ richtig durchgeführt hat, dann folgt aus dem Gesetz zum Modus ponens

$$A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$$

das Meßergebnis von B . Wegen $B = \neg A$, d.h. wenn Bob etwas anderes mißt als Alice, läßt sich das Gesetz zum Modus ponens umformen in

$$A \wedge (A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg A.$$

Von den 4 Möglichkeiten scheidet nun die erste und die vierte aus, so daß folgende Wahrheitstabelle verbleibt:

| A | B | $A \Rightarrow B$ |
|-----|-----|-------------------|
| w | f | f |
| f | w | w |

Die Messung A wird wahr, sobald Alice ihre Messung durchgeführt hat, so daß von den beiden letzten Möglichkeiten aufgrund des Pauli-Prinzips $B = \neg A$, wonach zwei Teilchen nicht die gleichen Quanteneigenschaften haben können, nur die erste verbleibt:

| A | B | $A \Rightarrow B$ |
|-----|-----|-------------------|
| w | f | f |

Die Schlußfolgerung, man könne von A auf B schließen, ist also falsch, denn gegen die Gesetze der Logik kann auch die Quantenmechanik nicht verstoßen. Die beiden Teilchen müssen also schon vor der Messung miteinander in Wechselwirkung getreten sein, und nicht erst durch die Messung

qed