

Mathematikaufgabe 101

[Home](#) | [Startseite](#) | [Impressum](#) | [Kontakt](#) | [Gästebuch](#)

Aufgabe: Sie werden als Kampfpilot eines Jagdflugzeugs frontal von einem gegnerischen Lenkflugkörper angegriffen und wollen ein Ausweichmanöver unter Zuhilfenahme eines neuronalen Netzwerks durchführen. Unter welchen Systemanforderungen kann dieses nur erfolgreich sein? Welche Schlußfolgerungen ziehen Sie daraus hinsichtlich des Fighters der nächsten Generation?

Lösung: Beim Luftkampf kommt es darauf an, aus Gründen der Selbstverteidigung möglichst schnell in den sicheren Bereich zu gelangen, der innerhalb des Krümmungskreises der gegnerischen Waffe liegt. Wenn wir das Ausweichmanöver zu früh einleiten, ist dieser Weg zu lang für uns und die Lenkwaffe trifft uns. Leiten wir das Manöver zu spät ein, schaffen wir es nicht mehr, in den Krümmungsradius einzufliegen, ehe uns die Waffe erreicht hat. Vergewärtigen wir uns zunächst die Situation in Abbildung 1.

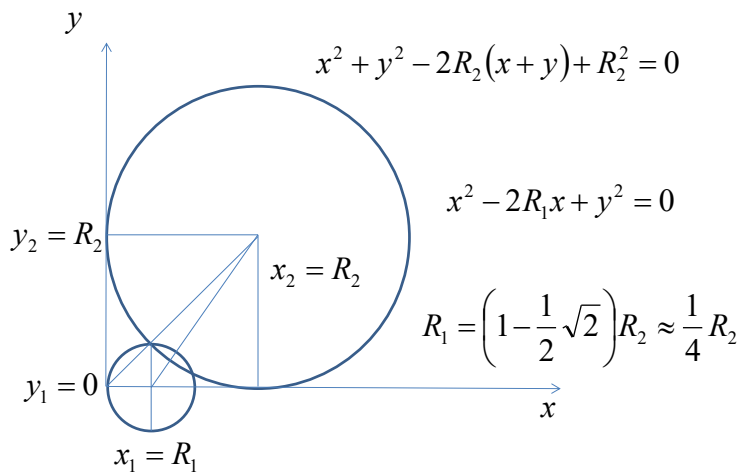


Abbildung 1. Ausgangssituation bei einem Ausweichmanöver

Wir selbst befinden uns idealerweise zum Zeitpunkt, in dem wir das Ausweichmanöver einleiten, im Koordinatenursprung und planen, der angreifenden Munition nach rechts auszuweichen. Da die Munition viel schneller fliegt als wir, wird sie unserer Ausweichbewegung folgen und im von uns erzwungenen Abstand ihres Krümmungsradius nach links ausweichen, um sogleich ihren Vorhaltepunkt anzufliegen. Diesen kennt sie zu dem Zeitpunkt noch nicht, weil wir direkt auf sie zufliegen. Ab jetzt geht es nur noch darum, wer als erster im anvisierten Kollisionspunkt eintrifft. So wie wir die Geometrie gewählt haben, müssen wir direkt einen 45° -Winkel fliegen, um möglichst schnell in den Krümmungskreis des Gegners zu gelangen. Da wir aber kein unetriges lineares Kurvensegment fliegen können, müssen wir unseren eigenen Krümmungskreis so fliegen, daß unser Bogensegment den Krümmungskreis des Kollisionsgegners genau nach einer Vierteldrehung durchsticht.¹ Da wir den Krümmungskreis des Gegners nicht genau kennen und nur hilfsweise berechnen können, scheint es zunächst eine reine Glückssache zu sein,

¹ Danach sollten wir nach links abdrehen, um nicht wieder aus dem sicheren Krümmungskreis des Gegners herauszufliegen. Wir haben das aus Gründen der Einfachheit nicht eingezeichnet.

Mathematikaufgabe 101

wie das Manöver ausgeht. Ggesetzt den Fall, wir haben ein zuverlässiges Meßverfahren verwendet und konnten den Krümmungskreis des Angreifers bestimmen,² so berechnen wir daraus für die beiden Bogenlängen in der gewählten Anordnung³ die Werte

$$b_1 = R_1 \varphi_1 = R_1 \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad b_2 = R_2 \varphi_2 = R_2 \frac{\pi}{4}.$$

Gemäß unserer beabsichtigten Anordnung sollten sich die beiden Radien genau wie

$$\frac{R_1}{R_2} = 1 - \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

verhalten. Ferner kommt es nun darauf an, wie stark sich die Weglängen bis zum Eintrittspunkt in den Sicherheitsbereich unterscheiden. Wir bilden dazu die Differenz der Bogenlängen, indem wir das angestrebte Verhältnis der Radien einsetzen. Dann gilt die Bedingung

$$\Delta b = b_1 - b_2 = R_1 \frac{\pi}{2} - R_2 \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} (1 - \sqrt{2}) R_2 < 0.$$

In jedem Fall müssen wir schneller, d.h. in kürzerer Zeit am „Treffpunkt“ sein als unser Gegner, also muß gelten:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{b_1}{v_1} - \frac{b_2}{v_2} < 0.$$

bzw.

$$\frac{v_1}{v_2} > \frac{b_1}{b_2} = \frac{2R_1}{R_2} = 2 - \sqrt{2} \approx \frac{1}{2}.$$

Wir müssen also selbst, um diese Bedingung zu erfüllen, schneller fliegen als mit halber gegnerischer Fluggeschwindigkeit. Nur dann kann unser Ausweichmanöver gelingen. Dazu müssen mit Hilfe eines neuronalen Netzes die entsprechenden geometrischen Verhältnisse hergestellt werden, d.h. wir werden zunächst die gegnerische Fluggeschwindigkeit ermitteln. Das kann mit Hilfe eines Sensors geschehen, der die Differenzgeschwindigkeit Δv mißt. Bei entgegenkommenden Objekten addieren sich die Geschwindigkeiten naturgemäß, so daß $\Delta v = v_1 + v_2$ bzw. $v_2 = -v_1 + \Delta v$, wobei alle Größen positiv gerechnet werden. In vektorieller Notation gilt also vor dem Ausweichmanöver

$$\vec{v}_1 = v_1 \vec{e}_y \quad \text{und} \quad \vec{v}_2 = -v_2 \vec{e}_y.$$

Daraus leiten sich die Ortsvektoren

² Ein solches Verfahren wäre beispielsweise eine nach rechts oder links auswandernde automatische Peilung des Gegners.

³ Aus Symmetriegründen

Mathematikaufgabe 101

$$\vec{r}_1(t) = v_1 t \vec{e}_y \quad \text{und} \quad \vec{r}_2(t) = (R_2 - v_2 t) \vec{e}_y,$$

her. Zum Zeitpunkt $t = 0$ möge unser Ausweichmanöver beginnen. Dann ergeben sich für eine Kreisbahn die Geschwindigkeitsvektoren

$$\vec{v}_1(t) = v_1 \sin \frac{v_1 t}{R_1} \vec{e}_x + v_1 \cos \frac{v_1 t}{R_1} \vec{e}_y \quad \text{und} \quad \vec{v}_2(t) = v_2 \sin \frac{v_2 t}{R_2} \vec{e}_x - v_2 \cos \frac{v_2 t}{R_2} \vec{e}_y.$$

Den gegnerischen Krümmungsradius erhalten wir aufgrund der Geschwindigkeitsdifferenz in x -Richtung, i.e.

$$\Delta v_x = v_{1,x} - v_{2,x} = v_1 \sin \frac{v_1 t}{R_1} - v_2 \sin \frac{v_2 t}{R_2},$$

wenn wir die Relativbewegung durch das Auswandern der Peilung zu Beginn des Ausweichmanövers messen, solange die Argumente des Sinus noch klein sind. Dann gilt die Näherung

$$\Delta v_x \approx \left(\frac{v_1^2}{R_1} - \frac{v_2^2}{R_2} \right) t \quad \text{bzw.} \quad R_2 \approx \frac{v_2^2 R_1}{v_1^2 - \frac{\Delta v_x R_1}{t}}.$$

Die Bewegungsgleichungen bekommen wir durch Integration:

$$\vec{r}_1(t) = R_1 \left(1 - \cos \frac{v_1 t}{R_1} \right) \vec{e}_x + R_1 \sin \frac{v_1 t}{R_1} \vec{e}_y \quad \text{und} \quad \vec{r}_2(t) = R_2 \left(1 - \cos \frac{v_2 t}{R_2} \right) \vec{e}_x + R_2 \left(1 - \sin \frac{v_2 t}{R_2} \right) \vec{e}_y.$$

Für die Bewegung in x -Richtung gelten die Komponentengleichungen

$$x_1(t) = R_1 \left(1 - \cos \frac{v_1 t}{R_1} \right) \quad \text{und} \quad x_2(t) = R_2 \left(1 - \cos \frac{v_2 t}{R_2} \right).$$

In jedem Fall muß, wenn das Ausweichmanöver gelingen soll, die Koordinatendifferenz

$$x_1 - x_2 = R_2 \left(\cos \frac{v_2 t}{R_2} - 1 \right) - R_1 \left(\cos \frac{v_1 t}{R_1} - 1 \right) > 0$$

sein. Mit der Näherung für kleine Argumente finden wir die Bedingung

$$x_1 - x_2 = \left(\frac{v_1^2}{R_1} - \frac{v_2^2}{R_2} \right) \frac{t^2}{2} > 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{v_1^2}{v_2^2} > \frac{R_1}{R_2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \approx \frac{1}{4},$$

d.h. wir erhalten wieder die Forderung

$$\frac{v_1}{v_2} > \frac{1}{2}.$$

Für die Bewegung in y -Richtung haben wir andererseits die Komponentengleichungen

Mathematikaufgabe 101

$$y_1(t) = R_1 \sin \frac{v_1 t}{R_1} \quad \text{und} \quad y_2(t) = R_2 \left(1 - \sin \frac{v_2 t}{R_2} \right)$$

zu lösen. Alle Gleichungen zusammengefaßt, ergeben folgende Matrixdarstellung:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} R_1 \left(1 - \cos \frac{v_1 t}{R_1} \right) & R_2 \left(1 - \cos \frac{v_2 t}{R_2} \right) \\ R_1 \sin \frac{v_1 t}{R_1} & R_2 \left(1 - \sin \frac{v_2 t}{R_2} \right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \cos \frac{v_1 t}{R_1} & 1 - \cos \frac{v_2 t}{R_2} \\ \sin \frac{v_1 t}{R_1} & 1 - \sin \frac{v_2 t}{R_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Verwenden wir die lineare Näherung für kleine Argumente, so vereinfacht sich diese Matrix zu

$$\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{v_1 t}{R_1} \right)^2 & \frac{1}{2} \left(\frac{v_2 t}{R_2} \right)^2 \\ \frac{v_1 t}{R_1} & 1 - \frac{v_2 t}{R_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \varphi_1^2 & \frac{1}{2} \varphi_2^2 \\ \varphi_1 & 1 - \varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix}.$$

Wir haben hiermit ein neuronales Netzwerk mit vier Gleichungen und vier Variablen vorliegen, das grundsätzlich lösbar ist. Das neuronale Netzwerk soll feuern, d.h. das Ausweichmanöver einleiten, sobald sichergestellt ist, daß die Winkel sich folgenden Werten annähern:

$$\varphi_1 = 2\varphi_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Das ist nur mit der folgenden Gewichtsmatrix zu leisten:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 1 - \cos \varphi_1 & 1 - \cos \varphi_2 \\ \sin \varphi_1 & 1 - \sin \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 - \frac{1}{2} \sqrt{2} \\ 1 & 1 - \frac{1}{2} \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Mit der Zielmatrix \mathbf{Y} und der Eingangsmatrix \mathbf{X} können wir auch schreiben:

$$\mathbf{Y} \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 - \frac{1}{2} \sqrt{2} \\ 1 & 1 - \frac{1}{2} \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} = \mathbf{W}\mathbf{X}.$$

Wir erhalten also genau das gewünschte Ergebnis $x_1 = y_1 = R_1$ und $x_2 = y_2 = R_2(1 - \sqrt{2}/2)$.
Falls

$$R_1 = R_2 \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{2} \right),$$

werden wir abgeschossen, weil dann $x_1 = y_1 = x_2 = y_2$ gilt. Unser neuronales Netzwerk definiert sich hingegen gerade durch die Hyperebenen

$$\left(\begin{array}{ll} -x_1 + R_1 < 0 & -x_2 + R_2 \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{2} \right) < 0 \\ -y_1 + R_1 < 0 & -y_2 + R_2 \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{2} \right) < 0 \end{array} \right),$$

womit wir, wenn die Kleiner-Relationen erfüllt sind, überleben. Hierin ist die Wirkung eines Abstandszünders noch nicht eingerechnet. Wir trainieren somit unser neuronales Netz auf den kürzesten zu fliegenden Abstand. Kann uns die Munition nicht mehr folgen, fliegt sie an uns vorbei. Aber bis sie gewendet hat, um uns erneut zu verfolgen, verstreicht für den Gegner wertvolle Zeit. Wichtig ist, falls wir nicht entkommen können, daß wir auch dann der Munition wieder genau entgegenfliegen und dieselbe Prozedur erneut durchführen. Schwieriger wird es, wenn wir von mehreren Lenkwaffen gleichzeitig angegriffen werden. Dann kann es unter Umständen notwendig werden, Täuschkörper auszubringen. Ein solches System ist nur einsetzbar, wenn der Pilot die extremen Querbeschleunigungen aushalten kann, was in der Regel nicht der Fall ist. Ein unbemanntes Flugzeug hat mit Querbeschleunigungen, die einem Piloten bereits schaden würden, hingegen kein Problem. Sicher ist aber, daß man im Luftkampf unter Zuhilfenahme von künstlicher Intelligenz jedes bemannte militärische Luftfahrzeug vom Himmel holen kann.