Aufgabe mit Lösung

Aufgabenstellung: Eine Frau habe zwei Töchter. Die ältere bringt sie mit 20 zur Welt, die jüngere erst im Alter von 40. Bei jeder der zwei Töchter sowie bei deren Töchtern und allen weiteren Enkelinnen und Urenkelinnen usw. verhält es sich ganz genauso: Jede bringt die erste Tochter mit 20 zur Welt und die zweite mit 40. Das Alter einer Generation betrage (speziell in unserem Beispiel) 20 Jahre. Nach 20 Jahren hat die Frau also gerade eine Tochter geboren, die erste Folgegeneration zählt also auch nur einen Nachkommen. Nach 40 Jahren kommt die zweite Tochter hinzu sowie die erste Enkelin, insgesamt bringt also die zweite Generation 2 Nachkommen hervor. In der dritten Generation, also nach 60 Jahren, kommen zwei weitere Enkelinnen hinzu, aber auch schon die erste Urenkelin (die Tochter der ersten Enkelin). Durch diese Generation sind also 3 weitere Nachkommen hinzugekommen. Wie viele Nachkommen der Frau gibt es insgesamt bis einschließlich der 10. Generation (d.h. nach 200 Jahren), wie viele in der 20sten (nach 400 Jahren)?

Lösung: Durch Iteration bis zur *n*. Generation ergibt sich folgende Summenformel:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{n-k}$$

wobei *k* eine Laufvariable größer Null ist und die Fakultät definiert durch

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{für} \quad 0 \le k \le n \\ 0 & \text{für} \quad 0 \le n < k \end{cases}$$

Die ersten Koeffizienten lauten:

$$\sum_{k=1}^{1} \binom{k}{1-k} = \binom{1}{0} = 1$$

$$\sum_{k=1}^{2} \binom{k}{2-k} = \binom{1}{1} + \binom{2}{0} = 1 + 1 = 2$$

$$\sum_{k=1}^{3} \binom{k}{3-k} = \binom{1}{2} + \binom{2}{1} + \binom{3}{0} = 0 + 2 + 1 = 3$$

$$\sum_{k=1}^{4} \binom{k}{4-k} = \binom{1}{3} + \binom{2}{2} + \binom{3}{1} + \binom{4}{0} = 0 + 1 + 3 + 1 = 5$$

$$\sum_{k=1}^{5} \binom{k}{5-k} = \binom{1}{4} + \binom{2}{3} + \binom{3}{2} + \binom{4}{1} + \binom{5}{0} = 0 + 0 + 3 + 4 + 1 = 8$$

$$\sum_{k=1}^{6} \binom{k}{6-k} = \binom{1}{5} + \binom{2}{4} + \binom{3}{3} + \binom{4}{2} + \binom{5}{1} + \binom{6}{0} = 0 + 0 + 1 + 6 + 5 + 1 = 13$$

Die restlichen Fakultäten mag sich der Leser anhand des Pascalschen Dreiecks selbst ableiten.

In der 10. Generation werden

$$\sum_{k=1}^{10}\binom{k}{10-k}=89$$

Nachkommen geboren, in der 20. Generation sind es bereits

$$\sum_{k=1}^{20}\binom{k}{20-k}=10946$$

Insgesamt haben wir bis zur 10. Generation 231 Nachfahren, bis einschließlich der 20. sind es 28655 Abkömmlinge.

Die Aufgabe kann auch iterativ graphisch gelöst werden, das ist allerdings die weniger elegante Methode. In folgender Tabelle sind die Koeffizienten vollständig bis zur 10. Generation angegeben.

	1x	**2x**	**3x**	**4x**	**5x**	**6x**	**7x**	**8x**	**9x**	**10x**	**Σ**
1	1										**1**
2	1	1									**2**
3		2	1								**3**
4		1	3	1							**5**
5			3	4	1						**8**
6			1	6	5	1					**13**
7				4	10	6	1				**21**
8				1	10	15	7	1			**34**
9					5	20	21	8	1		**55**
10					1	15	35	28	9	1	**89**
11						6	35	56	36	10	**144**
12						1	21	70	84	45	**233**
13							7	56	126	120	**377**
14							1	28	126	210	**610**
15								8	84	252	**987**
16								1	36	210	**1597**
17									9	120	**2584**
18									1	45	**4181**
19										10	**6765**
20										1	**10946**
Σ	**2**	**4**	**8**	**16**	**32**	**64**	**128**	**256**	**512**	**1024**	**28655**

Einfache Lösung: Zähle, bei 1 beginnend, um die nächstfolgende Generation zu erhalten, immer das Ergebnis der vorhergehenden hinzu, d.h. zur 1 die 1, zur 2 die 1, zur 3 die 2 usw.