Theorie einer mehrwertigen objektorientierten Erkennung

Sei $P:\mathbf{B}^n \mapsto \mathbf{R}$ eine Abbildung, die jedem Element $\mathbf{p}=\left(p_1,\ldots,p_i,\ldots,p_n\right)\in\mathbf{B}^n$ ein Element $P(\mathbf{p})\in[0,1]\subset\mathbf{R}$ zuordnet, für das gilt:

$$P(\mathbf{p})=1-q_1q_2\cdots q_i\cdots q_n$$

wobei $\mathbf{q}=\left(q_1,\ldots,q_i,\ldots,q_n\right)\in\mathbf{B}^n$ definiert ist durch die Negation $q_i\equiv 1-p_i\ \forall i\in\{1,\ldots,n\}$.

Es sei nun speziell der Boolsche Raum $\mathbf{B}\equiv\mathbf{B}_3=\{0,1/2,1\}$, der neben den Boolschen Zahlen 0 und 1 auch noch den Boolschen Wahrheitswert 1/2 enthält, der für eine Aussage steht, die sowohl wahr als auch falsch sein kann.

Handelt es sich bei den Boolschen Wahrheitswerten ausschließlich um solche, die für mögliche Ereignisse stehen bzw. für Aussagen, die weder wahr noch falsch sind, so vereinfacht sich obiger Ausdruck wegen $p_i\equiv p\ \forall i\in\{1,\ldots,n\}$ und $q_i\equiv q\ \forall i\in\{1,\ldots,n\}$ zu

$$P=1-q^n=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}p^{n-i}q^i\ .$$

Da beide Wahrheitswerte wegen obiger Definition identisch sind, d.h. $p=q=1/2$, folgt weiter

$$P=\frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}.$$

Aufgrund der bekannten Relation

$$\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}-\binom{n}{n}=2^n-1$$

erhalten wir eine Folge

$$P_n=\frac{2^n-1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n},$$

die im Grenzwert für große n gegen 1 strebt, d.h.

$$\lim_{n\to\infty}P_n=1,$$

was dem Wahrheitswert 1 entspricht. Wegen

$$Q_n\equiv 1-P_n=\frac{1}{2^n}$$

folgt entsprechend

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = 0\,.$$

Abweichend von den dreiwertigen Logiken [1] - [8] ergeben sich somit für $n = 2$ die folgenden Wahrheitstabellen für Disjunktion und Negation:

$p_1 \vee p_2$	0	1/2	1
0	0	1/2	1
1/2	1/2	3/4	1
1	1	1	1

p	$\neg p$
0	1
1/2	1/2
1	0

Tabelle 1: Wahrheitstabellen in dreiwertiger Logik zu ODER-Verknüpfung und Negation

die einen neuen Wahrheitswert 3/4 enthalten, der zwar immer noch nicht wahr im Sinne von 1 ist, aber auch nicht mehr so indifferent wie 1/2. Wenn nämlich zwei Aussagen sowohl wahr als auch falsch sein können, ist die Wahrscheinlichkeit, daß beide Aussagen nicht zutreffen, kleiner als die Summe der Wahrscheinlichkeiten, daß beide Aussagen zutreffen oder wenigstens eine der Aussagen zutrifft. Das ist nur logisch.

Nehmen wir als weiteres Beispiel eine Disjunktion aus $n = 3$ Aussagen. Dazu verwenden wir die Wahrheitstabelle für zwei verknüpfte Aussagen und verknüpfen jeden Wert der Reihe nach mit dem dritten Wahrheitswert. Ist die dritte Aussage eindeutig falsch, verbleibt es beim Wahrheitsgehalt von zwei wahren Aussagen, was auch zu erwarten war. Kann die dritte Aussage sowohl wahr als auch falsch sein, haben zwei unwahre Aussagen mit der dritten verknüpft einen höheren Wahrheitswert, nämlich den der dritten Aussage. Entsprechend erhöht sich der Wahrheitswert jedesmal, wenn ein indifferentes Ereignis hinzukommt, bei insgesamt zwei möglichen Ereignissen auf 3/4, bei drei möglichen Ereignissen auf 7/8. Ist die dritte Aussage hingegen wahr, so wird die verknüpfte Aussage insgesamt auf den Wahrheitswert 1 angehoben.

$p_1 \vee p_2 \vee 0$	0	1/2	1
0	0	1/2	1
1/2	1/2	3/4	1
1	1	1	1

$p_1 \vee p_2 \vee (1/2)$	0	1/2	1
0	1/2	3/4	1
1/2	3/4	7/8	1
1	1	1	1

$p_1 \vee p_2 \vee 1$	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	1	1	1
1	1	1	1

Tabelle 2: ODER-Verknüpfung in dreiwertiger Logik für drei Boolsche Variablen

Der resultierende Wahrheitswert liegt also stets in der Mitte zwischen dem Wahrheitswert der zu verknüpfenden Aussage und dem der endgültig verknüpften Aussage.

Eine unbestimmte Wahrheit kristallisiert sich also immer stärker als eine endgültige heraus, je mehr mögliche Ereignisse hinzukommen. Im Grenzfall für unendlich viele zutreffende oder nicht zutreffende Ereignisse landen wir stets beim Wahrheitswert 1. Wir müssen lediglich darauf achten, wirklich nur solche Aussagen zu verknüpfen, die auch tatsächlich wahr sein können und die in ein Gesamtbild passen, etwa in dasjenige eines Objekts, auf das viele beschreibende Merkmale zutreffen. Sobald wir nur ein Merkmal darunter haben, das in eindeutiger Weise den Wahrheitswert 1 zurückgibt, können wir die weitere Wahrheitsfindung abbrechen, denn dann sind wir ja bereits im Besitz der Wahrheit.

Bibliographie

[1] Jan Łukasiewicz, Philosophical Remarks on Many-Valued Systems of Propositional Logic, in: Storrs MacCall (Hg.), Polish Logic 1920-1939, Oxford 1967.

[2] Stephen Cole Kleene: *On notation for ordinal numbers*. Journal Symbolic Logic 3(1938), 150-155.

[3] Graham Priest, An Introduction to Non-Classical Logic. From If to Is, Cambridge 2008, S. 120-141.

[4] Kurt Gödel: „Zum intuitionistischen Aussagenkalkül," Anzeiger Akademie der Wissenschaften Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse ***69****, Seite 65f.*

[5] Kreiser/Gottwald/Stelzner: *Nichtklassische Logik*, Kapitel 2.1 „Grundprinzipien der mehrwertigen Logik", Seite 19f.

[6] Siegfried Gottwald: *Mehrwertige Logik. Ein Einführung in Theorie und Anwendung*, Berlin: Akademie-Verlag, 1989, 1995.

[7] Alexander Alexandrowitsch Sinowjew: *Über mehrwertige Logik. Ein Abriß*, Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1968.

[8] Hajek, Petr: *Fuzzy Logic*. In: Edward N. Zalta: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Spring 2009.