Fraktale Logik und quantisierte Wahrheitsräume

Die Aristotelische Logik kennt nur zwei Wahrheitswerte 1 (wahr) und 0 (falsch). Für Aussagen, die weder wahr noch falsch sind, hält sie kein entsprechendes Element bereit. Sie kann damit Vorgänge, die nicht eindeutig einem Wahrheitsgehalt zuzuordnen sind, und das sind die weitaus meisten, nicht klar beschreiben. Ereignisse, die keiner der beiden Kategorien „wahr" oder „falsch" zugeordnet werden können, werden daher als „unscharf" bezeichnet, und man kann ihnen symbolisch den Mittelwert aus 1 und 0 zuweisen, nämlich 1/2. Wir reden dann von einer dreiwertigen Logik. Theoretisch kann man sogar hergehen und die durch Mittelung erhaltene Boolsche Zahl immer wieder aufs neue halbieren, wobei wir Boolsche Mengen aus 2^n+1 Elementen bekommen. Diese Mengen bezeichnen wir allgemein mit $\mathbf{B}_{2^n+1}$, wobei $n \geq 1$. Es sind also

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}_3 &= \{0, \tfrac{1}{2}, 1\} \\
\mathbf{B}_5 &= \{0, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}, 1\} \\
\mathbf{B}_9 &= \{0, \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{8}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{8}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{7}{8}, 1\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Boolsche Mengen, für die gilt: $\mathbf{B}_{2^n+1} \subset \mathbf{B}_{2^{n+1}+1}$. Die Boolsche Zahl 1/4 würde beispielsweise stehen für „weniger als möglich, aber noch nicht unwahr", und die Zahl 3/4 für „mehr als möglich, aber noch nicht wahr". Da der Mensch kein sehr feines Empfinden für Abstufungen der Wahrheit besitzt, beschränken wir uns im folgenden auf die Menge $\mathbf{B}_3$ und betrachten die Abbildung

$$P : \mathbf{B}_3^n \to \mathbf{B}_{2^n+1},$$

die jedem Element $(p_1, \cdots, p_n) \in \mathbf{B}_3 \times \cdots \times \mathbf{B}_3$ ein Element $P(p_1, \cdots, p_n) \in \mathbf{B}_{2^n+1}$ zuordnet. Abhängig von der Dimension n unseres Boolschen Vektors $\mathbf{p}$ erhalten wir für steigendes n eine Folge von Abbildungen

$$
\begin{aligned}
&P : \mathbf{B}_3 \to \mathbf{B}_3 \\
&P : \mathbf{B}_3^2 \to \mathbf{B}_5 \\
&P : \mathbf{B}_3^3 \to \mathbf{B}_9 \\
&\vdots \\
&P : \mathbf{B}_3^n \to \mathbf{B}_{2^n+1}
\end{aligned}
$$

in einen immer höherdimensionalen Boolschen Werteraum, wobei wir die Funktion P definieren durch

$$P(\mathbf{p}) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i).$$

Mit $q_i = \neg p_i \; \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ ist die Negation nach dem Komplementärgesetz gegeben durch $p_i + q_i = 1$ bzw. $q_i = 1 - p_i$. Im eindimensionalen Fall erhalten wir mit $q = 1 - p$ und $P(p) = 1 - q = p$ die folgende Wahrheitstabelle:

p	0	$\frac{1}{2}$	1
$P(p)$	0	$\frac{1}{2}$	1

Gemäß unserer Beschränkung auf $\mathbf{B}_3$ betrachten wir nun als den nächst einfachsten Fall einen Definitionsbereich mit zwei Dimensionen. Gemäß unseren obigen Ausführungen gilt

$$P:(p_1, p_2) \in \mathbf{B}_3 \times \mathbf{B}_3 \mapsto P(p_1, p_2) \in \mathbf{B}_5$$

Die nachfolgende Wahrheitstabelle ähnelt sehr stark der aus der dreiwertigen Logik

$P(p_1, p_2)$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
1	1	1	1

ist aber wegen der Relation $1/2 + 1/2 = 3/4$ eindeutig eine Verknüpfung aus dem $\mathbf{B}_5$. Es gelten die Neutralitäts- und Extremalgesetze für die Disjunktion, d.h.

$$\begin{aligned} &0 + 0 = 0 \\ &0 + 1/2 = 1/2 \\ &0 + 1 = 1 \\ &1/2 + 1/2 = 3/4 \\ &1/2 + 1 = 1 \\ &1 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Wegen $\mathbf{B}_3^2 \subset \mathbf{B}_5^2$ lautet die vollständige Wahrheitstabelle für die Disjunktion auf dem $\mathbf{B}_5$:

$P(p_1, p_2)$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{13}{16}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	1
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{16}$	1
1	1	1	1	1	1

Daneben gilt der Satz des Pythagoras, für den allerdings die Konjunktion definiert werden muß. Im $\mathbf{B}_3$ gelten folgende UND-Verknüpfungen, deren einziger Unterschied zu den üblicherweise für Fuzzy-Logiken geltenden Wahrheitstabellen in der Verknüpfung zweier unscharfer Aussagen liegt, denn hier gilt abweichend $1/2 \wedge 1/2 = 1/4$, d.h. die Unschärfe zweier unscharfer Aussagen ist als Konjunktion zwar noch „unschärfer, aber immer noch nicht falsch". Die vollständige Wahrheitstabelle lautet also:

$p_1 \wedge p_2$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1

Schließlich ist die auf den $\mathbf{B}_5$ ausgeweitete Wahrheitstabelle für die Konjunktion gegeben durch

$p_1 \wedge p_2$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1

Damit kann nun auch der Satz des Pythagoras für diese Logik definiert werden. Die insgesamt 6 möglichen Verknüpfungen auf dem $\mathbf{B}_3$ lauten:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{0^2+0^2} = 0\\
&\sqrt{0^2+(1/2)^2} = 1/2\\
&\sqrt{0^2+1^2} = 1\\
&\sqrt{(1/2)^2+(1/2)^2} = \sqrt{1/2}\sqrt{7/8}\\
&\sqrt{(1/2)^2+1^2} = 1\\
&\sqrt{1^2+1^2} = 1
\end{aligned}
$$

Hierbei ist zu berücksichtigen, daß wir wegen $(1/2)^2+(1/2)^2 = 1/4+1/4 = 7/16$ und $7/16 = (7/8)(1/2)$ die vollständigen Wahrheitstabellen für die Konjunktion auf dem $\mathbf{B}_9$ benötigen.

Die Erweiterung auf drei Dimensionen erfolgt nach bisherigem Muster. Wir definieren eine Abbildung

$$P:(p_1,p_2,p_3) \in \mathbf{B}_3 \times \mathbf{B}_3 \times \mathbf{B}_3 \mapsto P(p_1,p_2,p_3) \in \mathbf{B}_9$$

wobei wir unsere Auswahl wegen unserer begrenzten Fähigkeit, Unschärfen besser als auf 1/2 zu unterscheiden, im Bereich der Teilmenge $\mathbf{B}_3^3 \subset \mathbf{B}_5^3 \subset \mathbf{B}_9^3$ bleiben. Für die Konjunktion müssen wir nunmehr einen dreidimensionalen Wahrheitsraum aufspannen, den wir in einzelne Wahrheitsflächen zerlegen können, die unseren alten Wahrheitstabellen entsprechen. In Tabelle 1 ist die Wahrheitstabelle der Konjunktion für $p_3 = 0$, in Tabelle 2 für $p_3 = 1/2$ berechnet, die Abbildungen 1 und 2 zeigen diese Wahrheitsflächen in Form einer Oberflächengrafik.

$P(p_1, p_2, p_3)$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	1
0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	1
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{11}{32}$	$\frac{29}{64}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{43}{64}$	$\frac{25}{32}$	$\frac{57}{64}$	1
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{32}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{17}{32}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{23}{32}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{29}{32}$	1
$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{29}{64}$	$\frac{17}{32}$	$\frac{39}{64}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{49}{64}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{59}{64}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$	1
$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{43}{64}$	$\frac{23}{32}$	$\frac{49}{64}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{55}{64}$	$\frac{29}{32}$	$\frac{61}{64}$	1
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{25}{32}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{29}{32}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{31}{32}$	1
$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{57}{64}$	$\frac{29}{32}$	$\frac{59}{64}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{61}{64}$	$\frac{31}{32}$	$\frac{63}{64}$	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabelle 1. Wahrheitstabelle für $p_3 = 0$ im Wahrheitsraum $\mathbf{B}_9^3 \equiv \mathbf{B}_9 \times \mathbf{B}_9 \times \mathbf{B}_9$

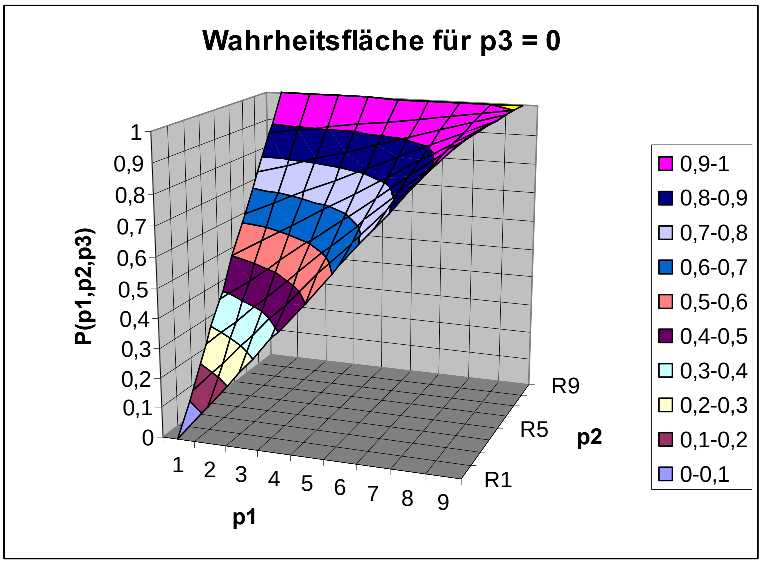

Abbildung 1. Darstellung der Wahrheitstabelle aus Tabelle 1 als Oberflächengrafik

Man kann klar erkennen, daß die Wahrheitsflächen sich für wachsendes p_3 immer mehr der Einheitsfläche annähern. Die gleichgewichtete „unscharfe“ Wahrheit verläuft als Diagonale durch die jeweilige Wahrheitsfläche, und sie nähert sich immer mehr der 1, je schärfer die beiden Wahrheitsvariablen sind. Sind alle drei Variablen gleichermaßen unscharf, so entspricht diesen nur ein einzelner Punkt im gesamten Wahrheitsraum.

Höherdimensionale Abbildungen sind räumlich nicht mehr darstellbar. Je mehr unscharfe Aussagen wir verknüpfen, in desto höherdimensionale Wahrheitsräume dringen wir ein und desto feiner wird unsere Unterteilung in äquidistante Wahrheitswerte. Das gilt auch, wenn wir uns auf den $\mathbf{B}_3^n$ beschränken.

$P(p_1,p_2,p_3)$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	1
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$	1
$\frac{1}{8}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{79}{128}$	$\frac{43}{64}$	$\frac{93}{128}$	$\frac{25}{32}$	$\frac{107}{128}$	$\frac{57}{64}$	$\frac{121}{128}$	1
$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{43}{64}$	$\frac{23}{32}$	$\frac{49}{64}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{55}{64}$	$\frac{29}{32}$	$\frac{61}{64}$	1
$\frac{3}{8}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{93}{128}$	$\frac{49}{64}$	$\frac{103}{128}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{113}{128}$	$\frac{59}{64}$	$\frac{123}{128}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{25}{32}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{29}{32}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{31}{32}$	1
$\frac{5}{8}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{107}{128}$	$\frac{55}{64}$	$\frac{113}{128}$	$\frac{29}{32}$	$\frac{119}{128}$	$\frac{61}{64}$	$\frac{125}{128}$	1
$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{57}{64}$	$\frac{29}{32}$	$\frac{59}{64}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{61}{64}$	$\frac{31}{32}$	$\frac{63}{64}$	1
$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{121}{128}$	$\frac{61}{64}$	$\frac{123}{128}$	$\frac{31}{32}$	$\frac{125}{128}$	$\frac{63}{64}$	$\frac{127}{128}$	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabelle 2. Wahrheitstabelle für $p_3 = 1/2$ im Wahrheitsraum $\mathbf{B}_9^3 \equiv \mathbf{B}_9 \times \mathbf{B}_9 \times \mathbf{B}_9$

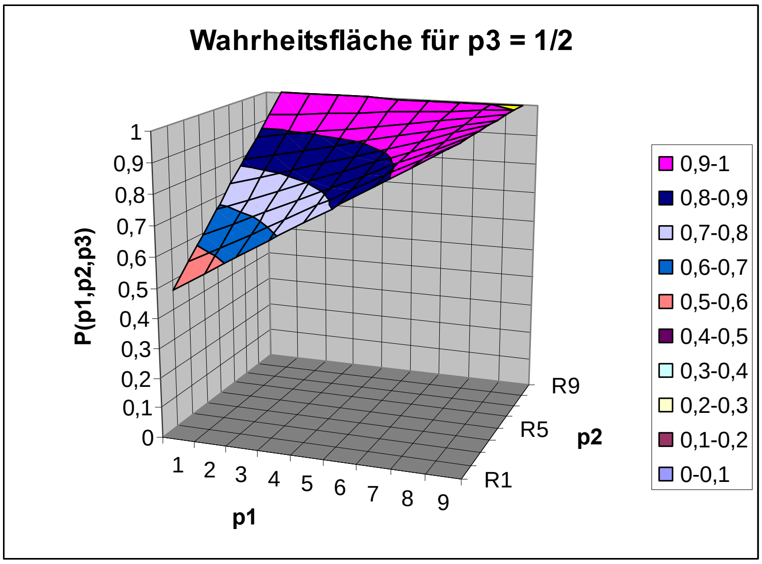

Abbildung 2. Darstellung der Wahrheitstabelle aus Tabelle 2 als Oberflächengrafik

Die aristotelische Logik beschreibt die Welt nicht vollständig, da sie nur zwei quantisierte Werte der Wahrheit kennt: die Eins für die volle Wahrheit und die Null für die Unwahrheit. Viele Aussagen der realen Welt sind jedoch unscharf, man kann ihnen weder die volle Wahrheit, also die logische Eins, zuordnen noch sind sie vollends unwahr, sie sind lediglich möglich oder können sowohl wahr als auch unwahr sein. Auch die dreiwertige Logik stimmt nicht mit den Gesetzen der Statistischen Mathematik, insbesondere der Kombinatorik überein, weil die Summe oder das Produkt zweier oder sogar beliebig vieler unscharfer Aussagen denselben Unschärfewert besitzt. Logisch hingegen wäre, daß sich der Unschärfewert ändert, in der Konjunktion muß er kleiner werden, in der Disjunktion größer. Betrachten wir dazu die Wahrheitstabelle für die gewöhnliche Konjunktion, wo $(1/2)(1/2) = 1/2$ ist:

$p \wedge q$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
1	0	1	1

Aber – die Wahrheit ist leider nicht symmetrisch, wie man an dem bekannten Beispiel

$$(p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

erkennt, denn Terme, die nur von q abhängen, müssen im Falle $p = q = 1/2$ kleiner sein als die Summe der anderen. Daraus kann nur folgen, daß im Falle zweier Merkmalskombinationen der Wahrheitsgehalt der UND-Verknüpfung gleich 1/4 und der ODER-Verknüpfung entsprechend 3/4 sein muß. Diesem Umstand wird von der fraktalen Logik, wie sie oben definiert wurde, Rechnung getragen, denn diese Logik folgt nicht nur dem gesunden Menschenverstand, sie ist auch im Einklang mit der Statistischen Mathematik. Ein logischer Sachverhalt darf kein anderes Ergebnis zeitigen, als es sonstige Disziplinen der Mathematik tun. Diesem Umstand kann die binäre Logik nicht gerecht werden. Erst die Erweiterung auf rationale Wahrheitswerte vermag dieses zu leisten, jedoch auch hier nur korrekt, wenn die Konjunktion linear, die Disjunktion dagegen nichtlinear verläuft. Eine nichtlineare Disjunktion verläuft für zunehmende Wahrheitswerte in jede Achsrichtung linear, längs der Diagonalen der Wahrheitstabelle hingegen nichtlinear. Der n-dimensionale Boolsche Raum, der nichts anderes ist als die mehrdimensionale Erweiterung des eindimensionalen Boolschen Raums, liefert für zwei Dimensionen die klassische Wahrheitstabelle, für drei Dimensionen die sogenannten Wahrheitsflächen, also das blattweise Zerlegen des dreidimensionalen Raumes in zweidimensionale Unterräume, und ist ab vier Dimensionen nicht mehr anschaulich darstellbar. Aus der Konstanz der Summe der Wahrscheinlichkeiten folgt wegen der Linearität der Konjunktion die Nichtlinearität der Disjunktion, und damit die Krümmung des fraktales Wahrheitsraumes im Einklang mit der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Die Methode kommt überall dort zum Einsatz, wo Einzelaussagen a priori nicht feststehen, also unscharf sind. Je mehr solcher Einzelaussagen gemeinsam betrachtet werden, desto mehr formt sich unser Bild von der Wahrheit, welche dem höchstmöglichen Wahrheitswert gleichgesetzt werden kann. Läßt sich ein Objekt beispielsweise durch soundso viele seiner charakteristischen Attribute beschreiben, die allesamt entweder zutreffen können oder auch nicht, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß es sich um ein anderes als das gesuchte Objekt handeln kann, äußerst gering. Wenn auch nur eines dieser Merkmale scharf ist, d.h. eindeutig nachgewiesen werden kann, ist die Fragestellung, ob es sich um dieses Objekt handelt, auch bei noch so vielen weiteren unscharfen Merkmalen nicht mehr relevant, da dann die Gesamtwahrscheinlichkeit sofort auf 1 gesetzt werden darf. Der Rand des Wahrheitsraumes entspricht also dem klassischen aristotelischen Wahrheitswert 1 oder gegebenenfalls auch dem Wahrheitswert 0. Alle anderen Kombinationen liegen innerhalb des Randes und sind per Definition unscharf. Jedoch ist die Unschärfe nicht für alle Objekte gleichermaßen unscharf, denn es gibt mehr oder weniger scharfe Objekte. In der Regel steigt die Schärfe und damit auch die Klarheit über dieses Objekt mit der Zahl der aufsummierten Merkmale, die als solche festgestellt worden sind, sich aber nicht zu bewahrheiten brauchen. Sie müssen nur für das zu identifizierende Objekt typisch sein.

Ein einmal festgestelltes Merkmal geht nach dieser Methode nicht wieder verloren, sondern wird im Gedächtnis behalten. Je mehr Merkmale sich hinzugesellen, desto höher wird die Wahrscheinlichkeit im Wahrheitsraum, bis sie schließlich bei sehr vielen Merkmalen beliebig dicht an die Eins und damit an die Wahrheit heranreicht. Es ist immer möglich, relativ viele Merkmale, die ein Objekt charakterisieren, herauszufinden, denn nur zwei völlig identische Objekte sind nichtunterscheidbar. Die Kunst der Objektidentifizierung besteht darin, hinreichend lange über ein Objekt nachzudenken, bis man sich sicher sein kann, daß es nicht mit einem anderen verwechselt werden kann. Es reicht beispielsweise nicht, einem Auto nur das eine Attribut, daß es vier Räder hat, beizumessen, denn es gibt durchaus andere Gefährte, die ebenfalls vier Räder haben, z.B. ein Fuhrwerk.

Wählen wir als einfaches Beispiel den Holocaust, der von einigen geleugnet wird. Doch ist diese Leugnung logisch überhaupt haltbar? Es gibt zahlreiche den Holocaust beschreibende Merkmale: Es gibt das Wannsee-Protokoll, es gab Pogrome, die Konzentrationslager, Gaskammern, Krematorien, Zyklon B, Deportiertenlisten, Zeugenaussagen und Tätergeständnisse. Bei allen diesen 9 Einzelaussagen können wir an ihrer Wahrheit zweifeln – denn die Zeugenaussagen könnten falsch, die Tätergeständnisse erzwungen, die Pogrome lediglich der Enteignung, die Konzentrationslager politischen Zwecken gedient haben; Zyklon B könnte auch als Entlausungsmittel eingesetzt worden sein usw. – wir können die Einzelaussagen aber auch nicht widerlegen. Berechnen wir nun mit Hilfe unserer Theorie die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{2^9-1}{2^9}=1-\frac{1}{2^9}=1-\frac{1}{1024}\approx 99{,}8\,\%\,,$$

so hat der Holocaust mit 99,8-%iger Sicherheit stattgefunden. Würden wir noch mehr Merkmale hinzufügen, läge die Wahrscheinlichkeit noch näher bei 1. Über die genaue Höhe der Opferzahlen kann diese Logik freilich keine Aussagen machen. Verwendet man hingegen andere dreiwertige Logiken, so bliebe das Ergebnis auch bei noch so vielen unscharfen Merkmalen stets unscharf. Solche Logiken müssen daher in bezug auf ihre Brauchbarkeit überprüft werden, weil sie dem Augenschein trotzen und damit dem gesunden Menschenverstand zuwiderlaufen.

Die fraktale Logik hingegen schließt diese Lücke, und das lediglich durch Einführung eines weiteren Wahrheitswertes, der in der Mitte liegt. Diese Basis aus drei Wahrheitswerten behebt die Schwächen der klassischen Logik, jedoch nur, wenn deren ureigene Regeln nicht einfach stur auf die quantisierte Logik übertragen werden. Erst im Grenzfall unendlich vieler Merkmale lösen sich die Unschärfen auf und die Wahrheit tritt klar zutage. Dies wird bestätigt durch die Tatsache, wie sehr man sich bei nur einer Beobachtung bezüglich des Ganzen irren kann.