Einführung in die Quantenlogik

Sei p die relative Häufigkeit, mit der ein Ereignis A eintritt. Dann ist $q = 1 - p$ die relative Häufigkeit, mit der das Ereignis nicht eintritt. In Wahrscheinlichkeiten ausgedrückt heißt das, daß die gesamte Wahrscheinlichkeit P für und wider das Eintreten von A gleich 1 sein muß, d.h. bei gleicher Wahrscheinlichkeit für p und q gilt wie beim einfachen Münzwurf

$$P = p + q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Bei zwei gleichzeitigen Münzwürfen multiplizieren sich die Teilwahrscheinlichkeiten P_1 und P_2 gemäß

$$P = P_1 \cdot P_2 = (p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2 = 1.$$

Dabei ist p^2 die Wahrscheinlichkeit für das sichere Eintreten des Ereignisses „Zweimal Kopf geworfen“, q^2 die Wahrscheinlichkeit für das sichere Nichteintreten dieses Ereignisses bzw. das Eintreten des Gegenereignisses „Zweimal Zahl geworfen“, und $2pq$ ist die Unsicherheit für das Eintreten dieser beiden Ereignisse oder die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines dritten Ereignisses in Form „Einmal Kopf und einmal Zahl geworfen.“ Insgesamt können wir also die Gesamtwahrscheinlichkeit in einen wahren und einen falschen Anteil P_w und P_f zerlegen, derart daß

$$P = P_w + P_f = p^2 + 2pq + q^2 = 1.$$

Dabei nennen wir $p^2 + 2pq$ die maximal mögliche Wahrheit, die alle Terme umfaßt, in denen p wenigstens einmal vorkommt, q^2 die sichere Unwahrheit und $2pq$ den unscharfen Beitrag P_u zur Wahrheit. Indizieren wir für die sukzessive Fortsetzung des Verfahrens die Ordnung n (Zahl der Münzwürfe) noch mit (2), so erhalten wir im Ergebnis

$$P_f^{(2)} = q^2, \quad P_u^{(2)} = 2pq, \quad P_w^{(2)} = 1 - q^2 = p^2 + P_u^{(2)}.$$

Im Falle der klassischen Logik, die nur mit den Wahrscheinlichkeiten 0 und 1 operiert, ist entweder

$$P_w^{(2)} = 1, \quad P_f^{(2)} = 0, \quad P_u^{(2)} = 2 \cdot 1 \cdot 0 = 0 \quad \text{oder} \quad P_w^{(2)} = 0, \quad P_f^{(2)} = 1, \quad P_u^{(2)} = 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0.$$

In dieser Logik gibt es keine Unschärfe, in der Quantenlogik jedoch, in der definitionsgemäß $p = q \equiv 1/2$ gesetzt wird, solange man nichts Näheres weiß, gilt in Analogie zur Fuzzy logic

$$P_f^{(2)} = \frac{1}{4}, \quad P_u^{(2)} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad P_w^{(2)} = \frac{3}{4}.$$

Der unscharfe Beitrag ist also genau doppelt groß wie der absolut unwahre. Man könnte zwar Terme, in denen Potenzen von q größer als 1 vorkommen, auch der Unwahrheit zuordnen und die Unschärfe gleichmäßig aufteilen, aber dann bliebe man innerhalb der Fuzzy logic und käme niemals auf Wahrscheinlichkeiten größer als 0,5. Es gibt jedoch gute Gründe, das nicht zu tun und die Unschärfe einer der beiden gesuchten Aussagen zuzuordnen, in unserem Fall der Wahrheit, und sich auf das Gesetz der großen Zahlen zu berufen, womit die Abweichung von einem angestrebten Wert um so kleiner wird, je öfter man den Versuch wiederholt. Es muß also auch die Abweichung von der Wahrheit kleiner werden, je mehr Indizien man für diese sammelt, denn diese werden ja nicht willkürlich ausgewählt, sondern im Hinblick darauf, daß sie ein tatsächliches Objekt beschreiben oder ein Ereignis vorhersagen können.[1]

Gehen wir zu drei gleich wahrscheinlichen Ereignissen über, so gibt es keinen unscharfen Beitrag, da bei drei Münzen niemals eine gleiche Anzahl an Köpfen oder Zahlen geworfen werden kann. Das Ergebnis tendiert also immer entweder zu der einen oder anderen Seite hin. Man kann jedoch unter den Termen einer Binomialentwicklung zwei Terme geringster Sicherheit ausmachen und diese mitteln, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$\begin{aligned} P = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 = (p+q)^3 &= p^3 + 3p^2 q + 3pq^2 + q^3 \\ &= p^3 + 3pq(p+q) + q^3 = p^3 + 3pq + q^3 = 1, \end{aligned}$$

woraus sich die Wahrscheinlichkeiten der Quantenlogik mit $1/2 = \sqrt{pq}$ wie folgt ergeben:

$$P_f^{(3)} = q^3 = \frac{1}{8}, \quad P_u^{(3)} = 3\sqrt{pq}^3 = \frac{3}{8}, \quad P_w^{(3)} = 1 - q^3 = p^3 + 2P_u^{(3)} = \frac{7}{8}.$$

Die klassische Logik verhält sich nicht anders als bei 2 unabhängigen Ereignissen, denn auch hier ist entweder

$$P_w^{(3)} = 1, \quad P_f^{(3)} = 0, \quad P_u = 3\sqrt{1 \cdot 0}^3 = 0 \quad \text{oder} \quad P_w^{(3)} = 0, \quad P_f^{(3)} = 1, \quad P_u = 3\sqrt{0 \cdot 1}^3 = 0.$$

Bei 4 unabhängigen Ereignissen erhalten wir wieder einen symmetrischen Unschärfebeitrag

$$P = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4 = (p+q)^4 = p^4 + 4p^3 q + 6p^2 q^2 + 4pq^3 + q^4 = 1,$$

den wir ohne weitere Vereinfachung angeben können:

$$P_f^{(4)} = q^4 = \frac{1}{16}, \quad P_u^{(4)} = 6p^2 q^2 = \frac{3}{8}, \quad P_w^{(4)} = 1 - q^4 = p^4 + 4p^3 q + P_u^{(4)} + 4pq^3 = \frac{15}{16}.$$

Schließlich lautet der binomische Satz für 5 unabhängige Ereignisse

$$\begin{aligned} P = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4 \cdot P_5 = (p+q)^5 &= p^5 + 5p^4 q + 10p^3 q^2 + 10p^2 q^3 + 5pq^4 + q^5 \\ &= p^5 + 5p^4 q + 10p^2 q^2 (p+q) + 5pq^4 + q^5 = 1, \end{aligned}$$

wobei wir erneut einen unsymmetrischen Unschärfebeitrag künstlich bilden müssen:

[1] Man würde wohl einem Objekt, nach dem man sucht, kaum Attribute beimessen, welche dieses nicht besitzt.

$$P_f^{(5)} = q^5, \quad P_u^{(5)} = 10\sqrt{pq}^{\,5}, \quad P_w^{(5)} = 1 - q^5 = p^5 + 5p^4q + 2P_u^{(5)} + 5pq^4.$$

Die höheren Produkte führen wir nicht mehr explizit aus, sondern schreiben die Wahrscheinlichkeiten als Produkte aus n Teilwahrscheinlichkeiten, die wir mit Hilfe des binomischen Satzes in eine Summenschreibweise überführen können:

$$P \equiv \prod_{i=1}^{n}(p+q)^i = (p+q)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^{n-k}q^k = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}p^{n-k}q^k + q^n = 1.$$

Dabei haben wir das höchste Glied bereits abgespalten. Einer allgemeinen Regel folgend entwickeln wir nun auch die übrigen Terme bis zum $n$ten Glied:

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^{n-k}q^k = \binom{n}{0}p^nq^0 + \binom{n}{1}p^{n-1}q^1 + \ldots + \binom{n}{n}p^0q^n = 1.$$

Darin stellen folgende Binomialkoeffizienten einfache Größen dar:

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{n/2} = \frac{n!}{(n/2)!^2}, \quad \binom{n}{n} = 1.$$

Falls n gerade, läßt sich der unscharfe Term abseparieren:

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n/2-1}\binom{n}{k}p^{n-k}q^k + \binom{n}{n/2}p^{n/2}q^{n/2} + \sum_{k=n/2+1}^{n-1}\binom{n}{k}p^{n-k}q^k + q^n = 1$$

Gemäß unserer obigen Definition zerlegen wir die Gesamtwahrscheinlichkeit in folgende Anteile:

$$P_w^{(n)} = 1 - P_f^{(n)} = \sum_{k=0}^{n/2-1}\binom{n}{k}p^{n-k}q^k + P_u^{(n)} + \sum_{k=n/2+1}^{n-1}\binom{n}{k}p^{n-k}q^k, \quad P_u^{(n)} = \binom{n}{n/2}p^{n/2}q^{n/2}.$$

Im Falle, daß n ungerade und ≥ 3 ist, können wir in der binomischen Reihe die zwei am wenigsten scharfen Wahrheitsterme abtrennen,

$$\begin{aligned}(p+q)^n = &\sum_{k=0}^{(n-3)/2}\binom{n}{k}p^{n-k}q^k + \binom{n}{(n-1)/2}p^{(n+1)/2}q^{(n-1)/2} \\ &+ \binom{n}{(n+1)/2}p^{(n-1)/2}q^{(n+1)/2} + \sum_{k=(n+3)/2}^{n}\binom{n}{k}p^{n-k}q^k,\end{aligned}$$

und wegen

$$\binom{n}{(n-1)/2} = \binom{n}{(n+1)/2} = \frac{n!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{n+1}{2}\right)!}$$

wie folgt zusammenfassen:

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{(n-3)/2} \binom{n}{k} p^{n-k} q^k + \frac{n!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{n+1}{2}\right)!} p^{(n-1)/2} q^{(n-1)/2} + \sum_{k=(n+3)/2}^{n} \binom{n}{k} p^{n-k} q^k .$$

Dadurch, daß wir zwei Terme addiert haben, haben wir die Schwierigkeit umgangen, daß ungerade Potenzen eigentlich keinen unscharfen Beitrag liefern, weil sich eine ungerade Zahl nicht in zwei gerade Zahlen zerlegen läßt. Nur für $p=q=1/2$ läßt sich wegen $p+q=1$ ein kleinster scheinbarer Unschärfebeitrag konstruieren, der allerdings etwa doppelt so groß ist wie der für gerade Potenzen von n und den wir daher halbieren müssen:

$$P_w^{(n)} = 1 - P_f^{(n)} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{(n-3)/2} \binom{n}{k} p^{n-k} q^k + 2P_u^{(n)} & \text{für} \quad n=3 \\ \sum_{k=0}^{(n-3)/2} \binom{n}{k} p^{n-k} q^k + 2P_u^{(n)} + \sum_{k=(n+3)/2}^{n-1} \binom{n}{k} p^{n-k} q^k & \text{für} \quad n \ge 5 \end{cases}$$

wobei

$$P_u^{(n)} = \frac{1}{2} \frac{n!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{n+1}{2}\right)!} p^{(n-1)/2} q^{(n-1)/2} .$$

Abzüglich der Unschärfe erhalten wir für steigende Potenzen von n die Wahrscheinlichkeiten gemäß nachfolgender Tabelle:

n	$P_f^{(n)}$	$P_u^{(n)}$	$P_w^{(n)}$	$P_w^{(n)} - P_u^{(n)}$
1	q	$\sqrt{pq}$	$1-q$	$1-q-\sqrt{pq}$
2	q^2	$2pq$	$1-q^2$	$1-q^2-2pq$
3	q^3	$3\sqrt{pq}^3(p+q)$	$1-q^3$	$1-q^3-3\sqrt{pq}^3$
4	q^4	$6p^2q^2$	$1-q^4$	$1-q^4-6p^2q^2$
5	q^5	$10\sqrt{pq}^5(p+q)$	$1-q^5$	$1-q^5-10\sqrt{pq}^5$
6	q^6	$20p^3q^3$	$1-q^6$	$1-q^6-20p^3q^3$
7	q^7	$35\sqrt{pq}^7(p+q)$	$1-q^7$	$1-q^7-35\sqrt{pq}^7$
8	q^8	$70p^4q^4$	$1-q^8$	$1-q^8-70p^4q^4$
9	q^9	$126\sqrt{pq}^9(p+q)$	$1-q^9$	$1-q^9-126\sqrt{pq}^9$
10	q^{10}	$252p^5q^5$	$1-q^{10}$	$1-q^{10}-252p^5q^5$

Tabelle 1. Quantenlogische Wahrscheinlichkeiten bis zur 10. Ordnung

Die logische Unschärfe ist also das geometrische Mittel aus Wahrheit und Unwahrheit. Wegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

müssen die Wahrscheinlichkeiten $P_f^{(n)} = q^n$ und

$$P_w^{(n)} = 1 - P_f^{(n)} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n/2-1} \binom{n}{k} p^{n-k} q^k + P_u^{(n)} + \sum_{k=n/2+1}^{n-1} \binom{n}{k} p^{n-k} q^k & \text{für } \quad n \text{ gerade} \\ \sum_{k=0}^{(n-3)/2} \binom{n}{k} p^{n-k} q^k + 2P_u^{(n)} + \sum_{k=(n+3)/2}^{n-1} \binom{n}{k} p^{n-k} q^k & \text{für } \quad n \text{ ungerade} \end{cases}$$

mit

$$P_u^{(n)} = \begin{cases} \binom{n}{n/2} p^{n/2} q^{n/2} & \text{für } \quad n \text{ gerade} \\ \frac{1}{2} \binom{n}{(n-1)/2} p^{(n-1)/2} q^{(n-1)/2} & \text{für } \quad n \text{ ungerade} \end{cases}$$

für $p = q = 1/2$ sowie für hohe Quantenzahlen $n \to \infty$ gegen 0 bzw. 1 konvergieren und nähern sich damit der absoluten Wahrheit 1 bzw. Unwahrheit 0, selbst wenn nur eine Wahrscheinlichkeit von 1/2 für jedes Teilereignis angenommen wird. Die Unschärfe geht für hohe Quantenzahlen ebenfalls gegen Null, die Wahrheit wird sozusagen schärfer, je mehr Indizien man dafür sammelt. In der klassischen Logik ist die Wahrheit im Unterschied zur Quantenlogik a priori scharf, selbst wenn man nur ein Merkmal oder Ereignis betrachtet.

Daß der Ausdruck

$$P_u^{(n)} = \binom{n}{n/2} p^{n/2} q^{n/2} = \frac{n!}{[(n/2)!]^2} \frac{1}{2^n}$$

für gerades n gegen Null konvergiert, erhellt für alle n durch vollständige Induktion aus der Relation

$$\frac{(n+2)!}{[((n+2)/2)!]^2} \frac{1}{2^{n+2}} < \frac{n!}{[(n/2)!]^2} \frac{1}{2^n},$$

die vereinfacht in die Ungleichungen

$$\frac{(n+2)(n+1)}{\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}+1\right)} < 4 \quad \text{bzw.} \quad \frac{n+1}{n+2} < 1$$

mündet. Auch der Unschärfe-Term für ungerades n

$$P_u^{(n)} = \frac{1}{2} \frac{n!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)! \left(\frac{n+1}{2}\right)!} p^{(n-1)/2} q^{(n-1)/2} = \frac{n!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)! \left(\frac{n+1}{2}\right)!} \frac{1}{2^n}$$

konvergiert für große n gegen Null, denn für zwei aufeinanderfolgende ungerade Glieder gilt wegen

$$\frac{(n+2)(n+1)}{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n+3}{2}\right)} < 4 \quad \text{bzw.} \quad \frac{n+2}{n+3} < 1$$

für alle n die Abschätzung

$$\frac{(n+2)!}{\left(\frac{n+1}{2}\right)!\left(\frac{n+3}{2}\right)!}\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{n!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{n+1}{2}\right)!}\frac{1}{2^{n-1}}.$$

In der Fuzzy logic bleibt ein unscharfes Ereignis selbst bei noch so vielen betrachteten Teilereignissen immer noch unscharf. Die zugrunde liegende Boolsche Algebra stellt demnach keinen Bezug zur physikalischen Realität her, da sie die gleichen Prinzipien verwendet wie die klassische Logik.

In Tab. 2 sind noch einmal explizit die rationalen Wahrheitswerte für alle drei betrachteten Größen angegeben:

n	$P_f^{(n)}$	$P_u^{(n)}$	$P_w^{(n)}$	$P_w^{(n)} - P_u^{(n)}$
1	0,5	0,5	0,5	0
2	0,25	0,5	0,75	0,25
3	0,125	0,375	0,875	0,5
4	0,0625	0,375	0,9375	0,5625
5	0,03125	0,3125	0,96875	0,65625
6	0,015625	0,3125	0,984375	0,671875
7	0,0078125	0,2734375	0,9921875	0,71875
8	0,00390625	0,2734375	0,99609375	0,72265625
9	0,00195313	0,24609375	0,99804688	0,75195313
10	0,00097656	0,24609375	0,99902344	0,75292969

Tabelle 2. Konvergenz von Wahrheit, Unwahrheit und Unschärfe gegen ihren Grenzwert

Es werde nun angenommen, daß sich das sichere Ereignis E als Summe von n paarweise unvereinbaren Ereignissen A_i darstellen läßt, d.h.

$$E = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \quad \text{mit} \quad A_i \cap A_j = \phi \quad \text{und} \quad P(E) = P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = 1.$$

Wegen $B = B \cap E$ folgt dann für ein beliebiges zufälliges Ereignis B nach den Distributivgesetzen

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n),$$

wobei die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B aus dem Additionsaxiom folgt:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$$

Die Wahrscheinlichkeit für das sichere Ereignis ist aber stets gleich 1. Nach der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit gilt

$$P(B \cap A_i) = P(A_i)P(B \setminus A_i)$$

für alle *i*, womit der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit lautet:

$$P(B) = P(A_1)P(B \setminus A_1) + P(A_2)P(B \setminus A_2) + \ldots + P(A_n)P(B \setminus A_n).$$

Unter der Bedingung, daß das Ereignis A_i bereits eingetreten ist, sei die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(B \setminus A_i) = 1,$ andernfalls sei $P(B \setminus A_i) = 0.$

Für endlich viele, paarweise unvereinbare Ereignisse $A_i,\ i = 1, \ldots, n,$ liefert das Additionsaxiom also die Beziehung

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

Setzen wir $P(A_i) = 1/n \ \ \forall i,$ so ist die totale Wahrscheinlichkeit für $E = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ gegeben durch

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \setminus A_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P(B \setminus A_i) \leq 1.$$

Wegen $P(\overline{B} \setminus A_i) = 1 - P(B \setminus A_i)$ verhält es sich mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten des Gegenereignisses genau umgekehrt, so daß der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis lautet:

$$P(\overline{B}) = P(A_1)P(\overline{B} \setminus A_1) + P(A_2)P(\overline{B} \setminus A_2) + \ldots + P(A_n)P(\overline{B} \setminus A_n).$$

Daraus folgt

$$P(\overline{B}) + P(B) = P(\overline{B} \cup B) = 1.$$

Je nachdem, in wie vielen Fällen $P(B \setminus A_i) = 1$ ist, ist *P*(*B*) Element der folgenden diskreten Menge:

$$P(B) \in \left\{ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1 \right\}.$$

Je mehr bedingte Wahrscheinlichkeiten das sichere Ereignis mit 100 Prozent auf sich vereinen kann, desto näher liegt auch die totale Wahrscheinlichkeit bei der Wahrheit 1, die in einer endlichen Menge von Einzelereignissen auch angenommen werden kann. Dieser Sachverhalt ist in dem Venn-Diagramm in Abb. 1 noch einmal anschaulich dargestellt.

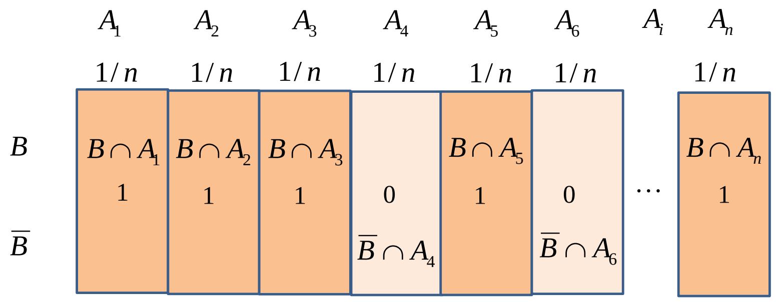

Abbildung 1. Venn-Diagramm für Ereignis und Gegenereignis bei endlicher Zahl von Teilereignissen

Die Wahrheit ist also in diskreten Schritten quantisiert, wie Tab. 3 am Beispiel von 3 Teilereignissen noch einmal zeigt. Die Teilwahrscheinlichkeiten haben wir für die 3 Ereignisse als gleichverteilt angenommen, d.h.

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3,$$

wobei für die bedingten Wahrscheinlichkeiten bei Vorhandensein oder Fehlen des beobachteten Teilereignisses die Relation

$$P(\overline{B} \setminus A_i) = 1 - P(B \setminus A_i)$$

gilt. Natürlich hätte man diese Teilereignisse auch anders gewichten können.

	$P(B \setminus A_1)$	$P(B \setminus A_2)$	$P(B \setminus A_3)$	$P(B)$
1	0	0	0	0
2	0	0	1	$1/3$
3	0	1	0	$1/3$
4	0	1	1	$2/3$
5	1	0	0	$1/3$
6	1	0	1	$2/3$
7	1	1	0	$2/3$
8	1	1	1	1

Tabelle 3. Totale Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses bei 3 Teilereignissen

In Abb. 2 versuchen wir nun die beiden Methoden miteinander zu vergleichen, wobei wir hier 3 Venn-Diagramme angelegt haben, für jedes Teilereignis eines. Wir machen dabei nichts anderes, als daß wir $4 \times 4 \times 4 = 64$ Multiplikationen ausführen und bezogen auf die 3 Grundfarben Blau, Grün und Rot je einen Term bekommen, der nur aus blauen bzw. roten Flächen zusammengesetzt ist, 8 unscharfe Terme, die nur aus grünen Flächen bestehen, 42 Terme, die 2 Farben aufweisen und 12, die alle 3 Farben auf sich vereinen.

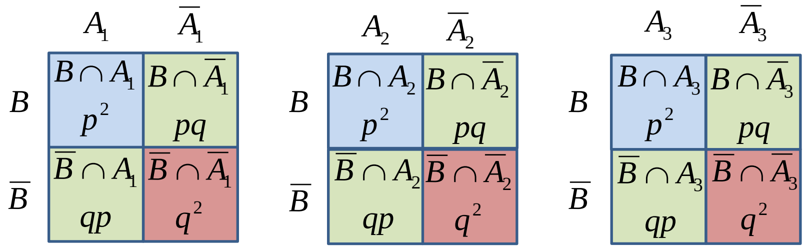

Abbildung 2. Venn-Diagramme für 3 paarweise unabhängige Ereignisse 6. Ordnung

Vergleichen wir das Resultat der bedingten Wahrscheinlichkeiten mit dem der fraktalen Wahrheiten für $n = 6$, so liegen wir mit einem Wahrheitswert von 0,98 gar nicht so weit entfernt vom klassischen Wert 1, der sich für 3 wahre Aussagen A_1, A_2 und A_3 ergibt. Selbst wenn im klassischen Ansatz nur 2 der 3 Aussagen richtig wären, läge das Ergebnis „Wahrheit abzüglich Unschärfe" (0,671875) nahe dem klassischen Wert von 2/3.

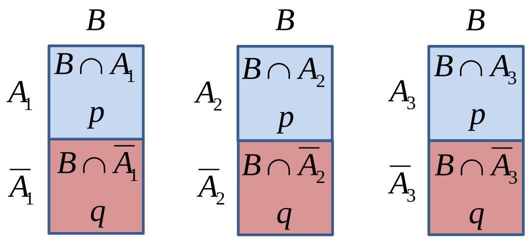

Abbildung 3. Venn-Diagramme für 3 paarweise unabhängige Ereignisse 3. Ordnung

Eine etwas andere Situation liegt in Abb. 3 vor. Hier machen wir uns das Distributivgesetz zunutze, dadurch daß

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) = (A \cup \overline{A}) \cap B = E \cap B.$$

Für die Wahrscheinlichkeiten bedeutet das, daß die Identität

$$P(B) = P((B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$$

gilt. Wenn also $P(B) = 1$ das sichere Ereignis ist, so folgt daraus

$$P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = 1,$$

und zwar für jeden beliebige Teilereignis A_i und damit auch für *n* Produkte aus diesen, so daß wir schreiben können:

$$P(B) = \prod_{i=1}^{n} \left(P_i(B \cap A_i) + P_i(B \cap \overline{A}_i) \right).$$

In Abb. 3 erkennt man auch, daß es für ungerades *n* keine unscharfen Ereignisse (grüne Flächen) gibt. In unserem Fall haben wir diesmal $2 \times 2 \times 2 = 8$ Multiplikationen auszuführen, so daß wir bezogen auf die beiden Grundfarben Blau und Rot nur je einen Term bekommen, der zur Gänze aus blauen bzw. roten Ereignissen zusammengesetzt ist, alle übrigen 6 Terme weisen beide Farben in unterschiedlichen Verhältnissen auf. Im Falle $n = 3$ haben wir also über alle 8 Permutationen zu summieren:

$$P(B) = \sum_{l=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} P_1\left(B \cap A_1^{(j)}\right) P_2\left(B \cap A_2^{(k)}\right) P_3\left(B \cap A_3^{(l)}\right),$$

wobei $A_i^{(1)} = A_i$ und $A_i^{(2)} = \overline{A}_i$. Seien nun die Teilwahrscheinlichkeiten für das Ereignis B gegeben durch

$$\begin{aligned}
P_1(B) &= P_1(B \cap A_1) + P_1(B \cap \overline{A}_1) = 1,\\
P_2(B) &= P_2(B \cap A_2) + P_2(B \cap \overline{A}_2) = 1,\\
P_3(B) &= P_3(B \cap A_3) + P_3(B \cap \overline{A}_3) = 1.
\end{aligned}$$

Dann ist die multiplikative Wahrscheinlichkeit $P(B) = P_1(B)P_2(B)P_3(B)$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
P(B) = {} & P_1(B \cap A_1)P_2(B \cap A_2)P_3(B \cap A_3) + P_1(B \cap A_1)P_2(B \cap A_2)P_3(B \cap \overline{A}_3)\\
& + P_1(B \cap A_1)P_2(B \cap \overline{A}_2)P_3(B \cap A_3) + P_1(B \cap A_1)P_2(B \cap \overline{A}_2)P_3(B \cap \overline{A}_3)\\
& + P_1(B \cap \overline{A}_1)P_2(B \cap A_2)P_3(B \cap A_3) + P_1(B \cap \overline{A}_1)P_2(B \cap A_2)P_3(B \cap \overline{A}_3)\\
& + P_1(B \cap \overline{A}_1)P_2(B \cap \overline{A}_2)P_3(B \cap A_3) + P_1(B \cap \overline{A}_1)P_2(B \cap \overline{A}_2)P_3(B \cap \overline{A}_3).
\end{aligned}$$

Setzen wir nun für die Teilwahrscheinlichkeiten der Schnittmengen die relativen Häufigkeiten p und q ein, so erhalten wir die 8 Permutationen für Ereignis und Gegenereignis gemäß Tabelle 4, die wir nur noch aufsummieren brauchen:

i	$P_1(B \cap A_1^{(j)})$	$P_2(B \cap A_2^{(k)})$	$P_3(B \cap A_3^{(l)})$	$P_{1j}P_{2k}P_{3l}$
1	p	p	p	p^3
2	p	p	q	p^2q
3	p	q	p	pqp
4	p	q	q	pq^2
5	q	p	p	qp^2
6	q	p	q	qpq
7	q	q	p	q^2p
8	q	q	q	q^3

Tabelle 4. Tabelle der Teilwahrscheinlichkeiten mit allen 8 Permutationen bei 3 Ereignissen

$$P(B) = p^3 + p^2q + pqp + pq^2 + qp^2 + qpq + q^2p + q^3.$$

Fassen wir noch Terme gleichen Grades zusammen, so erhalten wir klarerweise das gleiche Ergebnis wie mit Hilfe des binomischen Satzes, i.e.

$$
\begin{aligned}
(p+q)^3 &= \sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}p^{3-k}q^k = \binom{3}{0}p^3q^0 + \binom{3}{1}p^2q^1 + \binom{3}{2}p^1q^2 + \binom{3}{3}p^0q^3 \\
&= p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 = 1.
\end{aligned}
$$

Gemäß unserer obigen Festlegung von Wahrheit und Unwahrheit wiederholen wir hier nur den eingangs abgeleiteten Ausdruck

$$
P_f^{(3)} \equiv q^3, \quad P_w^{(3)} \equiv 1 - q^3 = p^3 + 2P_u^{(3)}, \quad P_u^{(3)} = 3\sqrt{pq}^{\,3}.
$$

Fassen wir noch einmal zusammen, so sind die beiden Beschreibungen für das Eintreten eines Ereignisses in Abhängigkeit von endlich vielen Teilereignissen im Grenzübergang für große Indizes äquivalent. Bei der Methode der bedingten Wahrscheinlichkeiten werden nur solche Teilereignisse berücksichtigt, die bereits eingetreten sind und deren Wahrscheinlichkeiten man daher mit ziemlicher Sicherheit angeben kann. Diese Methode unterliegt keinem Grenzprozeß, wenn alle Teilereignisse gleichzeitig zutreffen.

Die binomische Methode hingegen mittels unscharfer Teilereignisse wie in der Fuzzy logic konvergiert im Grenzfall unendlich vieler Ereignisse gegen die volle Wahrheit, die allerdings nie ganz erreicht wird, weil eine geringe Wahrheitsunschärfe stets verbleibt. Die anfangs unscharfe Wahrheit ist also in Teilwahrheiten gequantelt, egal, ob wir diese selbst als unscharf annehmen oder nur diejenigen zählen, die wir auch erkennen können. Die klassische Logik führt keinen Grenzübergang durch, sondern nimmt alles als gegeben wahr oder falsch, auch die Teilwahrheiten. Erst die Anwendung des binomischen Satzes auf jeweils endlich viele, gleich wahrscheinlich angenommene Teilereignisse führt bei hinreichend hohen Quantenzahlen zum selben Ergebnis wie die klassische Wahrscheinlichkeitstheorie mit Hilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit. Mithin scheint die Logik differenzierter zu sein als nur absolut wie in der Mathematik, nämlich quantisiert wie in der realen physikalischen Welt, während die klassische Logik diese Quantisierung in unzulässiger Weise vorwegnimmt und auch Einzelereignisse von ihrer stochastischen Natur ausnimmt. Da aber auch Teilwahrheiten keiner absoluten Überprüfung standhalten, setzt sich jede Wahrheit mosaikartig aus beinah unendlich vielen gekoppelten Beobachtungen zusammen, die ihrerseits wieder unscharf sind wie im analogen Fall der Quantenmechanik.

