

Physikaufgabe 84

[Home](#) | [Startseite](#) | [Impressum](#) | [Kontakt](#) | [Gästebuch](#)

Aufgabe: Leiten Sie die Kontinuitätsgleichung für das Kontinuum her und lösen Sie sie für den denkbar einfachsten, aber nicht notwendigerweise trivialen Fall. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Lösung: Die Masse m eines Mediums konstanter Dichte ρ ist gegeben durch

$$m = \rho V,$$

wobei $V = Ax$ das durchströmte Volumen in Richtung x ist und A eine konstante Fläche senkrecht zur Strömungsrichtung darstellt. Der Massestrom durch dieses Volumen definiert sich folglich durch

$$\dot{m} = \rho \dot{V} = \rho A \dot{x} = \rho A u.$$

Für die Stromdichte $j = \rho u$ folgt aus dieser Gleichung der Ausdruck

$$j = \rho u = \frac{\dot{m}}{A}.$$

Bei räumlich und zeitlich veränderlicher Dichte ergibt sich daraus für die partielle Ableitung der Stromdichte nach x die Gleichung

$$\frac{\partial j}{\partial x} = \frac{\partial \rho u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial m}{A \partial t} = \frac{\partial}{A \partial x} \frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial V} \frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial m}{\partial V} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

bzw.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial j}{\partial x} = 0.$$

Da die Dichte mit der einströmenden Masse zunimmt, die Ströme aber so definiert sind, daß sie aus dem Volumen herausfließen, müssen wir die Flächennormale mit einem Minuszeichen versehen und in Richtung des negativen Gradienten zeigen lassen, d.h. $-\mathbf{e}_x \partial / \partial x = \nabla$. Damit folgt die Kontinuitätsgleichung in ihrer allgemeinen differentiellen Form:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0,$$

wobei die Flächennormale natürlich auch beliebig orientiert sein kann. Betrachten wir nun die Kontinuitätsgleichung in der Form

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \mathbf{u} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Physikaufgabe 84

Multiplizieren wir diese Gleichung mit dem konstanten Volumen V , so erhalten wir die Kontinuitätsgleichung der Masse oder¹ der Teilchenzahl als Erhaltungsgrößen:

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \nabla m \cdot \mathbf{u} + m \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial N}{\partial t} + \nabla N \cdot \mathbf{u} + N \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Im Falle eines inkompressiblen Mediums folgt daraus die Ratengleichung

$$\frac{dN}{dt} + \gamma N = 0 \quad \text{mit} \quad \gamma \equiv \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

Im einfachsten Fall, d.h. bei konstanter Divergenz, kann man die Variablen separieren und beide Seiten integrieren:

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\gamma \int_0^t dt.$$

Die Lösung dieser Gleichung ergibt eine einfache Exponentialfunktion:

$$N(t) = N_0 e^{-\gamma t}.$$

Dies offenbart die besondere Bedeutung des Exponentialgesetzes in der Natur, welches lediglich eine Manifestation der Kontinuität unserer Erhaltungsgrößen darstellt.² Die Kontinuität bleibt gewahrt, wenn die Divergenz des Stroms verschwindet. Das ist die Zauberformel. Wenn sie zunimmt, bedarf es unaufhörlichen und ungesunden Wachstums, um sie auszugleichen. Da unsere Gesellschaft aber immer mehr Waren produziert und die Warenströme kontinuierlich zunehmen, kann die Kontinuität nicht gewahrt bleiben, womit nicht nur das ökonomische Gleichgewicht erheblich gestört wird, sondern auch alle damit gekoppelten Systeme Schaden nehmen. Unsere Wirtschaftsökonomen mögen sich da etwas anderes überlegt haben. Verstandesmäßiges Handeln scheint indes nicht des Menschen Stärke zu sein.

¹ Nach Kürzen der Elementarmasse

² Dieselbe Gesetzmäßigkeit gilt im übrigen auch für den Exporthandel und Warenaustausch sowie das Finanz- und Rentensystem.