

## Physikaufgabe 64

[Home](#) | [Startseite](#) | [Impressum](#) | [Kontakt](#) | [Gästebuch](#)

**Aufgabe:** Lösen Sie die Weltgleichung und leiten Sie daraus die Feldgleichungen der beiden vierdimensionalen Unterräume ab. Interpretieren Sie das Ergebnis.

**Lösung:** Die Klein-Gordon-Gleichung im Zeit-Ortsraum lautet:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hbar^2 \nabla^2\right) \psi(t, \vec{r}) = \hat{p}^2 \psi(t, \vec{r}),$$

wobei  $\hat{p} = i(\hbar/2)\partial/\partial s$  der Unschärfeoperator des Viererimpulses ist. Einerseits haben wir nun aufgrund der Matrixdarstellung im Zeit-Ortsraum

$$\mathbf{A} = -\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hbar^2 \nabla^2 = \left(i\frac{\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar \nabla\right) \left(i\frac{\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} - i\hbar \nabla\right) = \left(\frac{\hat{E}}{c} - \hat{\mathbf{p}}\right) \left(\frac{\hat{E}}{c} + \hat{\mathbf{p}}\right)$$

folgendes Eigenwertproblem zu lösen:

$$\mathbf{A} \psi(t, \vec{r}) = \hat{p}^2 \psi(t, \vec{r}).$$

Die Eigenwerte entsprechen gemäß

$$E^2 - \vec{p}^2 c^2 = (E + |\vec{p}|c)(E - |\vec{p}|c) = p^2 c^2$$

den Lösungen

$$E + |\vec{p}|c = pc \quad \text{und} \quad E - |\vec{p}|c = pc.$$

Im Energie-Impulsraum gilt die Klein-Gordon-Gleichung des reziproken Raums:

$$\left(-\hbar^2 c^2 \frac{\partial^2}{\partial E^2} + \hbar^2 \nabla_p^2\right) \Phi(E, \vec{p}) = \hat{s}^2 \Phi(E, \vec{p}),$$

wobei  $\hat{s} = -i(\hbar/2)\partial/\partial p$  der Unschärfeoperator der Raumzeit ist. Hier haben wir aufgrund der Matrixdarstellung

$$\mathbf{A}_p = -\hbar^2 c^2 \frac{\partial^2}{\partial E^2} + \hbar^2 \nabla_p^2 = \left(i\hbar c \frac{\partial}{\partial E} - i\hbar \nabla_p\right) \left(i\hbar c \frac{\partial}{\partial E} + i\hbar \nabla_p\right) = (c\hat{t} - \hat{\mathbf{r}})(c\hat{t} + \hat{\mathbf{r}})$$

das analoge Eigenwertproblem

$$\mathbf{A}_p \Phi(E, \vec{p}) = \hat{s}^2 \Phi(E, \vec{p})$$

zu lösen. Die Eigenwerte haben gemäß

$$c^2 t^2 - \vec{r}^2 = (ct - |\vec{r}|)(ct + |\vec{r}|) = s^2$$

## Physikaufgabe 64

---

die Lösungen

$$ct - |\vec{r}| = s \quad \text{und} \quad ct + |\vec{r}| = s.$$

Fassen wir die Klein-Gordon-Gleichungen für Ort und Impuls zusammen, so erhalten wir die Weltgleichung

$$\left( -\hbar^2 c^2 \frac{\partial^2}{\partial E^2} + \hbar^2 \nabla_p^2 \right) \left( -\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hbar^2 \nabla^2 \right) \Phi(E, \vec{p}) \psi(t, \vec{r}) = \hat{s}^2 \hat{p}^2 \Phi(E, \vec{p}) \psi(t, \vec{r}).$$

Mit der Weltwellenfunktion

$$\Psi(t, E, \vec{p}, \vec{r}) = \Phi(E, \vec{p}) \psi(t, \vec{r}),$$

welche die Eigenwertgleichung

$$\mathbf{A}_p \mathbf{A} \Psi(t, E, \vec{p}, \vec{r}) = \hat{s}^2 \hat{p}^2 \Psi(t, E, \vec{p}, \vec{r})$$

erfüllen muß, wobei

$$\hat{p} \hat{s} = -i^2 \frac{\hbar^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial s \partial p}$$

der Wirkoperator ist, folgt daraus der Ausdruck

$$(c\hat{t} + \hat{\mathbf{r}})(c\hat{t} - \hat{\mathbf{r}}) \left( \frac{\hat{E}}{c} + \hat{\mathbf{p}} \right) \left( \frac{\hat{E}}{c} - \hat{\mathbf{p}} \right) \psi(t, \vec{r}) \Phi(E, \vec{p}) = \frac{\hbar^4}{16} \frac{\partial^4}{\partial s^2 \partial p^2} \psi(t, \vec{r}) \Phi(E, \vec{p}).$$

Diese Gleichung lautet ausmultipliziert

$$\left( \frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hbar^2 \nabla^2 \right) \left( \hbar^2 c^2 \frac{\partial^2}{\partial E^2} - \hbar^2 \nabla_p^2 \right) \psi(t, \vec{r}) \Phi(E, \vec{p}) = \frac{\hbar^4}{16} \frac{\partial^2 \psi(t, \vec{r})}{\partial s^2} \frac{\partial^2 \Phi(E, \vec{p})}{\partial p^2}$$

und kann in die beiden Gleichungen

$$\left( \frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hbar^2 \nabla^2 \right) \psi(t, \vec{r}) = \frac{\hbar^2}{4} \frac{\partial^2 \psi(t, \vec{r})}{\partial s^2}$$

und

$$\left( \hbar^2 c^2 \frac{\partial^2}{\partial E^2} - \hbar^2 \nabla_p^2 \right) \Phi(E, \vec{p}) = \frac{\hbar^2}{4} \frac{\partial^2 \Phi(E, \vec{p})}{\partial p^2}$$

separiert werden. Indem wir die Weltwellenfunktion als Produkt von Materie- und Strahlungswellen, d.h. als Quadrat der Vierervektoren von Ort und Impuls definieren, i.e.

$$\psi(t, \vec{r}) \Phi(E, \vec{p}) \equiv s^2(t, \vec{r}) p^2(E, \vec{p}),$$

## Physikaufgabe 64

---

können wir die Weltgleichung in vier Eigenwertgleichungen separieren:

$$\left(\frac{\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} \pm \hbar \nabla\right) s(t, \vec{r}) = \frac{\hbar}{2} \frac{\partial s(t, \vec{r})}{\partial s} \quad \text{und} \quad \left(\hbar c \frac{\partial}{\partial E} \pm \hbar \nabla_p\right) p(E, \vec{p}) = \frac{\hbar}{2} \frac{\partial p(E, \vec{p})}{\partial p},$$

von denen nur die mit dem negativen Vorzeichen physikalisch sinnvoll sind, d.h.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \hbar \nabla\right) s(t, \vec{r}) &= \frac{\hbar}{2} \frac{\partial s(t, \vec{r})}{\partial s}, \\ \left(\hbar c \frac{\partial}{\partial E} - \hbar \nabla_p\right) p(E, \vec{p}) &= \frac{\hbar}{2} \frac{\partial p(E, \vec{p})}{\partial p}. \end{aligned}$$

Das sind die Feldgleichungen des achtdimensionalen Raums. Wir beschränken uns im folgenden und aus Gründen der Einfachheit auf eine Ortsdimension. Mit Hilfe der Heisenbergschen Unschärferelation

$$\Delta s \Delta p = \frac{\hbar}{2}$$

können wir diese Gleichungen in einer Dimension linearisieren,

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial s(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial s(t, x)}{\partial x} &= \frac{\Delta p}{\hbar} s(t, x), \\ c \frac{\partial p(E, p_x)}{\partial E} - \frac{\partial p(E, p_x)}{\partial p_x} &= \frac{\Delta s}{\hbar} p(E, p_x). \end{aligned}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist das differentielle Wegelement in zwei Dimensionen gegeben durch

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 \quad \text{bzw.} \quad ds(ct, x) = \sqrt{d(ct)^2 - dx^2},$$

wobei das totale Differential nach der Speziellen Relativitätstheorie gegeben ist durch

$$ds(ct, x) = \frac{\partial s(ct, x)}{\partial ct} dct + \frac{\partial s(ct, x)}{\partial x} dx = 0.$$

Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial s}{\partial ct} = \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - x^2}} = \frac{ct}{s} \quad \text{und} \quad \frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{c^2 t^2 - x^2}} = -\frac{x}{s}.$$

Formen wir das totale Differential entsprechend um in

$$ds = \frac{ct}{s} dct - \frac{x}{s} dx \quad \text{bzw.} \quad s ds = ct dct - x dx,$$

erhalten wir nach Integration den invarianten relativistischen Weg

## Physikaufgabe 64

---

$$s = \sqrt{c^2 t^2 - x^2} = \text{const} \quad \text{bzw.} \quad s^2 = c^2 t^2 - x^2 = \text{const}.$$

Damit ist

$$ds^2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad d(c^2 t^2 - x^2) = 0.$$

Das ist äquivalent zu

$$c^2 dt^2 = dx^2 \quad \text{oder} \quad ct \, dct = x \, dx$$

und führt nach Division durch  $s$  zu einer exakten Differentialgleichung:

$$\frac{ct}{s} - \frac{x}{s} \frac{dx}{dct} = s_{ct} + s_x \frac{dx}{dct} = 0.$$

Der Vergleich mit den partiellen Ableitungen von  $s$  zeigt, daß es zwei stetig partiell differenzierbare Funktionen

$$s_{ct} = \frac{\partial s}{\partial ct}, \quad s_x = \frac{\partial s}{\partial x}$$

gibt, welche die sogenannte Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial s_x}{\partial ct} = \frac{\partial s_{ct}}{\partial x}$$

erfüllen. Das zweidimensionale Vektorfeld  $(s_{ct}, s_x)$  läßt sich damit als Gradient des Weges  $s$  darstellen:

$$\nabla s = \begin{pmatrix} s_{ct} \\ s_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ct}{s} \\ -\frac{x}{s} \end{pmatrix}.$$

Weil aufgrund der Integrabilitätsbedingung die Rotation des Vektorfeldes  $(s_{ct}, s_x)$  verschwinden muß, i.e.

$$\nabla \times \nabla s = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial ct} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} s_{ct} \\ s_x \end{pmatrix} = \frac{\partial s_x}{\partial ct} - \frac{\partial s_{ct}}{\partial x} = 0,$$

gibt es ein zweimal stetig differenzierbares Potential  $s$ , das dem Satz von Schwarz genügt:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial ct \partial x} = \frac{\partial s_x}{\partial ct} = \frac{\partial s_{ct}}{\partial x} = \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial ct}.$$

## Physikaufgabe 64

---

Da also das Vektorfeld  $(s_{ct}, s_x)$  eine Potentialfunktion besitzt, erfüllt die totale Ableitung von  $s$  nach  $ct$  die Differentialgleichung

$$\frac{ds(ct, x)}{dct} = \frac{\partial s(ct, x)}{\partial ct} + \frac{\partial s(ct, x)}{\partial x} \frac{dx}{dct} = 0.$$

Die zweiten partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x \partial ct} = \frac{xct}{\sqrt{c^2 t^2 - x^2}^3} = \frac{xct}{s^3},$$
$$\frac{\partial^2 s}{\partial ct \partial x} = \frac{xct}{\sqrt{c^2 t^2 - x^2}^3} = \frac{xct}{s^3}$$

sind daher identisch. Das gleiche können wir sinngemäß für den Viererimpuls zeigen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist das differentielle Impulselement in zwei Dimensionen gegeben durch

$$dp^2 = \frac{dE^2}{c^2} - dp_x^2 \quad \text{bzw.} \quad dp(E/c, p_x) = \sqrt{d(E/c)^2 - dp_x^2},$$

wobei wir das totale Differential schreiben können als

$$dp(E/c, p_x) = \frac{\partial p(E/c, p_x)}{\partial E/c} dE/c + \frac{\partial p(E/c, p_x)}{\partial p_x} dp_x = 0.$$

Die partiellen Ableitungen sind gegeben durch

$$\frac{\partial p}{\partial E/c} = \frac{E/c}{\sqrt{E^2/c^2 - p_x^2}} = \frac{E/c}{p} \quad \text{und} \quad \frac{\partial p}{\partial p_x} = -\frac{p_x}{\sqrt{E^2/c^2 - p_x^2}} = -\frac{p_x}{p}.$$

Formen wir das totale Differential entsprechend um in

$$dp = \frac{E/c}{p} dE/c - \frac{p_x}{p} dp_x \quad \text{bzw.} \quad p dp = (E/c) dE/c - p_x dp_x,$$

so erhalten wir nach Integration den invarianten relativistischen Impuls

$$p = \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - p_x^2} = \text{const} \quad \text{bzw.} \quad p^2 = \frac{E^2}{c^2} - p_x^2 = \text{const}.$$

Damit ist

$$dp^2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad d\left(\frac{E^2}{c^2} - p_x^2\right) = 0.$$

Das ist äquivalent zu

## Physikaufgabe 64

---

$$\frac{dE^2}{c^2} = dp_x^2 \quad \text{oder} \quad (E/c)dE/c = p_x dp_x$$

und führt nach Division durch  $p$  zu einer exakten Differentialgleichung:

$$\frac{E}{cp} - \frac{p_x}{p} \frac{dp_x}{dE/c} = p_{E/c} + p_{p_x} \frac{dp_x}{dE/c} = 0.$$

Der Vergleich mit den partiellen Ableitungen von  $p$  zeigt, daß es zwei stetig partiell differenzierbare Funktionen

$$p_{E/c} = \frac{\partial p}{\partial E/c}, \quad p_{p_x} = \frac{\partial p}{\partial p_x}$$

gibt, welche die obengenannte Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial p_{p_x}}{\partial E/c} = \frac{\partial p_{E/c}}{\partial p_x}$$

erfüllen. Das zweidimensionale Vektorfeld  $(p_{E/c}, p_{p_x})$  läßt sich damit als Gradient des Impulses darstellen:

$$\nabla p = \begin{pmatrix} p_{E/c} \\ p_{p_x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{pc} \\ -\frac{p_x}{p} \end{pmatrix}.$$

Weil aufgrund der Integrabilitätsbedingung die Rotation des Vektorfeldes  $(p_{E/c}, p_{p_x})$  verschwinden muß, i.e.

$$\nabla \times \nabla p = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial E/c} \\ \frac{\partial}{\partial p_x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{E/c} \\ p_{p_x} \end{pmatrix} = \frac{\partial p_{p_x}}{\partial E/c} - \frac{\partial p_{E/c}}{\partial p_x} = 0,$$

gibt es ein zweimal stetig differenzierbares Potential  $p$ , das dem Satz von Schwarz genügt:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial E/c \partial p_x} = \frac{\partial p_{p_x}}{\partial E/c} = \frac{\partial p_{E/c}}{\partial p_x} = \frac{\partial^2 p}{\partial p_x \partial E/c}.$$

Da das Vektorfeld  $(p_{E/c}, p_{p_x})$  eine Potentialfunktion besitzt, erfüllt die totale Ableitung von  $p$  nach  $E/c$  die exakte Differentialgleichung

$$\frac{dp(E/c, p_x)}{dE/c} = \frac{\partial p(E/c, p_x)}{\partial E/c} + \frac{\partial p(E/c, p_x)}{\partial p_x} \frac{dp_x}{dE/c} = 0.$$

## Physikaufgabe 64

---

Die zweiten partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^2 p}{\partial p_x \partial E / c} = \frac{E}{c} \frac{\partial}{\partial p_x} \frac{1}{p} = \frac{p_x E}{p^3 c},$$
$$\frac{\partial^2 p}{\partial E / c \partial p_x} = \frac{p_x}{p^2} \frac{\partial p}{\partial E / c} = \frac{p_x E}{p^3 c}$$

sind daher identisch. Aus der Heisenbergschen Unschärferelation

$$\partial p \partial s = \partial E \partial t \Leftrightarrow \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial p}$$

folgt wegen

$$\frac{\partial p}{\partial E} = \frac{E}{pc^2} = \frac{m}{p}$$

und mit Hilfe der Umformung

$$m \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \frac{\partial p}{\partial t} = m \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \frac{\partial E}{\partial s} = m \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - mc^2 \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial s}$$

das Kräftegleichgewicht aus Trägheitskraft und Schwerkraft, d.h.

$$F = m \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - mc^2 \frac{\partial^2 s}{\partial s^2} = 0.$$

Dabei ist die schwere Masse gleich der trägen Masse. Man kann den Beweis auch klassisch führen, indem man setzt:

$$\partial |\mathbf{p}| \partial |\mathbf{r}| = \partial E \partial t \Leftrightarrow \frac{\partial |\mathbf{p}|}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial |\mathbf{r}|}.$$

Mit der Definition der Geschwindigkeit

$$v = \frac{\partial |\mathbf{r}|}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial |\mathbf{p}|} = \frac{|\mathbf{p}|}{m}$$

ergibt sich

$$F \equiv m \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial E}{\partial |\mathbf{r}|} = 0.$$

Setzen wir die Geschwindigkeit ein, folgt weiter

$$F = m \frac{\partial^2 |\mathbf{r}|}{\partial t^2} - \frac{\partial E}{\partial |\mathbf{r}|} = 0,$$

## Physikaufgabe 64

---

und nach Substitution der Energie  $E = mc^2$  erhalten wir

$$F = m \frac{\partial^2 |\mathbf{r}|}{\partial t^2} - mc^2 \frac{\partial}{\partial |\mathbf{r}|} \frac{\partial |\mathbf{r}|}{\partial |\mathbf{r}|} = mc^2 \frac{\partial^2 |\mathbf{r}|}{\partial (ct)^2} - mc^2 \frac{\partial^2 |\mathbf{r}|}{\partial |\mathbf{r}|^2} = 0.$$

Nach entsprechender Umformung ergibt sich

$$\frac{\partial^2 |\mathbf{r}|}{\partial |\mathbf{r}|^2} - \frac{\partial^2 |\mathbf{r}|}{\partial (ct)^2} = 0.$$

Wir erkennen darin unschwer eine Abbildung der Raum-Zeit-Relation in der Singularität für  $s = 0$ , i.e.

$$t^2 - \frac{|\mathbf{r}|^2}{c^2} = \frac{s^2}{c^2}.$$

Nochmaliges Differenzieren von

$$\frac{1}{c} \frac{\partial s(t, \vec{r})}{\partial t} - \nabla s(t, \vec{r}) = \frac{1}{2} \frac{\partial s(t, \vec{r})}{\partial s}$$

nach der Zeit führt mit Hilfe der Unschärferelation auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$m \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - mc \nabla \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{mc}{2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial s}{\partial s} = \frac{mc}{2} \frac{\partial p}{\partial E} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}.$$

Substituieren wir

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{p}{m} \quad \text{und} \quad \frac{\partial p}{\partial E} = \frac{m}{p},$$

so folgt weiter

$$m \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - m \nabla \frac{pc}{m} = \frac{1}{2} \frac{mc^2}{pc} m \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

bzw. mit den Abkürzungen  $E_{pot} = pc$  und  $E = mc^2$

$$m \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - m \nabla \frac{E_{pot}}{m} = \frac{1}{2} \frac{E}{E_{pot}} m \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}.$$

Mit Einführung des Potentials  $\phi = E_{pot}/m$  erhalten wir das Gravitationsgesetz des achtdimensionalen Raums



## Physikaufgabe 64

---

$$m \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - m \nabla \phi = \frac{1}{2} \frac{E}{E_{pot}} m \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}.$$

Wenn alle Energie noch potentielle Energie ist, d.h. solange noch keine kinetische Energie vorhanden ist, also gleich zu Beginn des Universums, gilt

$$\frac{1}{2} m \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = m \nabla \phi.$$

Wenn alle Energie kinetische Energie ist, d.h. wenn die potentielle Energie aufgebraucht und damit gleich null ist, also am Ende des Universums, gilt wegen  $\phi = 0$ :

$$m \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0,$$

d.h. die Geschwindigkeit hat einen konstanten Wert erreicht, nämlich den der Lichtgeschwindigkeit. Das ist kurz vor dem nächsten Urknall der Fall, wenn die Gravitationskraft keine Beschleunigung mehr aufweist.

Aufgrund der Heisenbergschen Unschärferelation

$$\partial s \partial p = \partial E \partial t \Leftrightarrow \frac{\partial s}{\partial E} = \frac{\partial t}{\partial p}$$

folgt wegen

$$\frac{\partial p}{\partial E} = \frac{\partial t}{\partial s} = \frac{m}{p}$$

und mit Hilfe der Umformung

$$\frac{\partial^2 p}{\partial E^2} - \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial t}{\partial E} = 0$$

durch Substitution der Ausdruck

$$\frac{\partial^2 p}{\partial E^2} - \frac{\partial t^2}{\partial s^2} \frac{\partial}{\partial p} = \frac{\partial^2 p}{\partial E^2} - \frac{m^2}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial p} = 0.$$

Durch Umformung ergibt dies die Relation

$$m^2 c^4 \frac{\partial^2 p}{\partial p^2} - p^2 c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial (E/c)^2} = 0.$$

Man kann den Beweis auch klassisch führen, indem man setzt:

## Physikaufgabe 64

---

$$\partial|\mathbf{r}|/\partial|\mathbf{p}| = \partial E \partial t \Leftrightarrow \frac{\partial|\mathbf{r}|}{\partial E} = \frac{\partial t}{\partial|\mathbf{p}|}.$$

Mit der Definition der „Impulsgeschwindigkeit“<sup>1</sup>

$$\frac{\partial|\mathbf{p}|}{\partial E} = \frac{\partial t}{\partial|\mathbf{r}|} = \frac{m}{|\mathbf{p}|}$$

ergibt sich die zweite Energieableitung zu

$$\frac{\partial^2|\mathbf{p}|}{\partial E^2} - \frac{\partial}{\partial|\mathbf{r}|} \frac{\partial t}{\partial E} = 0,$$

nach Substitution der Geschwindigkeit erhalten wir

$$\frac{\partial^2|\mathbf{p}|}{\partial E^2} - \frac{\partial t^2}{\partial|\mathbf{r}|^2} \frac{\partial}{\partial|\mathbf{p}|} = \frac{\partial^2|\mathbf{p}|}{\partial E^2} - \frac{m^2}{|\mathbf{p}|^2} \frac{\partial}{\partial|\mathbf{p}|} \frac{\partial|\mathbf{p}|}{\partial|\mathbf{p}|} = 0$$

und nach Umformung die Relation

$$m^2 c^4 \frac{\partial^2|\mathbf{p}|}{\partial|\mathbf{p}|^2} - |\mathbf{p}|^2 c^2 \frac{\partial^2|\mathbf{p}|}{\partial(E/c)^2} = 0.$$

Wir erkennen darin unschwer eine Abbildung der Energie-Impuls-Relation in der Singularität für  $p = 0$ , i.e.

$$m^2 c^4 - |\mathbf{p}|^2 c^2 = p^2 c^2.$$

Nochmalige Differentiation von

$$c \frac{\partial p(E, \vec{p})}{\partial E} - \nabla_p p(E, \vec{p}) = \frac{1}{2} \frac{\partial p(E, \vec{p})}{\partial p}$$

nach der Energie führt mit Hilfe der Unschärferelation auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{1}{m} \frac{\partial^2 p}{\partial E^2} - \frac{1}{mc} \nabla_p \frac{\partial p}{\partial E} = \frac{1}{2mc} \frac{\partial}{\partial E} \frac{\partial p}{\partial p} = \frac{1}{2c} \frac{\partial s}{\partial t} \frac{1}{m} \frac{\partial^2 p}{\partial E^2}.$$

Substituieren wir

$$\frac{\partial p}{\partial E} = \frac{m}{p} \quad \text{und} \quad \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{p}{m},$$

---

<sup>1</sup> D.h. der Ableitung des Impulses nach der Energie

## Physikaufgabe 64

---

so folgt weiter

$$\frac{1}{m} \frac{\partial^2 p}{\partial E^2} - \frac{1}{m} \nabla_p \frac{m}{pc} = \frac{1}{2} \frac{pc}{mc^2} \frac{1}{m} \frac{\partial^2 p}{\partial E^2}$$

bzw. mit den Abkürzungen  $E_{pot} = pc$  und  $E = mc^2$

$$\frac{1}{m} \frac{\partial^2 p}{\partial E^2} - \frac{1}{m} \nabla_p \frac{m}{E_{pot}} = \frac{1}{2} \frac{E_{pot}}{E} \frac{1}{m} \frac{\partial^2 p}{\partial E^2}.$$

Mit Einführung des reziproken Potentials  $\phi_p \equiv m/E_{pot}$  erhalten wir das reziproke „Gravitationsgesetz“ des achtdimensionalen Raums

$$\frac{1}{m} \frac{\partial^2 p}{\partial E^2} - \frac{1}{m} \nabla_p \phi_p = \frac{1}{2} \frac{E_{pot}}{E} \frac{1}{m} \frac{\partial^2 p}{\partial E^2}.$$

Falls die potentielle Energie gleich null ist, d.h. wenn alle Energie kinetische Energie ist, ist die Summe der „reziproken Kräfte“ ebenfalls gleich null:

$$\frac{1}{m} \frac{\partial^2 p}{\partial E^2} - \frac{1}{m} \nabla_p \phi_p = 0,$$

d.h. wie befinden uns im Zeitpunkt kurz vor dem nächsten Urknall. Wenn die potentielle Energie maximal ist, also gleich der Gesamtenergie, folgt

$$\frac{1}{2} m^{-1} \frac{\partial^2 p}{\partial E^2} = m^{-1} \nabla_p \phi_p.$$

Dann besitzt das All noch keine kinetische Energie, wir befinden uns im Zeitpunkt kurz nach dem Urknall, in dem die energetische Impulsbeschleunigung null und die energetische Impulsgeschwindigkeit konstant ist. Der Viererimpuls selbst wächst also am Anfang linear.

Mit dieser Aufgabe und den vorangegangenen haben wir versucht, die Quantenmechanik mit der Allgemeinen Relativitätstheorie zu verheiraten und eine einheitliche Feldtheorie abzuleiten. Da die Masse kein Vorzeichen hat, bezieht sich die Lösung der Eigenwertgleichung mit dem positiven Vorzeichen auf ein vergangenes oder zukünftiges Universum. Die Materie- und Strahlungswellen für Ort und Impuls löschen sich zum Zeitpunkt des Urknalls gegenseitig aus. Ersetzen wir beispielsweise die Masse durch die Ladung, welche ein Vorzeichen besitzt, so schließen wir daraus, daß das vorhergehende und das künftige Universum vollständig aus Antimaterie bestehen muß. Wenn Materie und Antimaterie aufeinandertreffen, wandeln sie sich gegenseitig vollends ineinander um. Das ist es, was man als den sogenannten Urknall bezeichnet. Gleichwohl entsteht das Universum nicht aus dem Nichts, weil das Produkt aus Ort und Impuls bzw. Energie und Zeit nicht kleiner werden kann als ein hälftiges Wirkungsquantum. Weder die Null noch das Unendliche sind exakt approximierbar, d.h. weder die Raumzeit noch die Impulsenergie können aus dem Nichts erzeugt worden sein, schon allein deswegen nicht, weil die Wirkung erhalten bleibt, was nichts anderes bedeutet, als daß die letzte Ursache und die erste Wirkung

## Physikaufgabe 64

---

identisch sind. Den von der Quantenmechanik in der Kopenhagener Deutung postulierten Zufall gibt es nicht, da es sich um einen rein relativistischen Effekt handelt. Die Welt läuft deterministisch und vorherbestimmt ab. Die neuronalen Netze der organischen Materie haben offenbar die Eigenschaft, sich durch Lernprozesse selbst vorherbestimmen zu können, ohne daß es dazu eines externen Einflusses bedarf.