

Physikaufgabe 59

[Home](#) | [Startseite](#) | [Impressum](#) | [Kontakt](#) | [Gästebuch](#)

Aufgabe: Lösen Sie die eindimensionale „Klein-Gordon-Gleichung für den reziproken Raum.“

Lösung: Setzen wir in das infinitesimale Wegelement

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

die differentiellen Operatoren von Zeit und Impuls ein,¹

$$d\hat{t} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial E}, \quad d\hat{x} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_x}, \quad d\hat{y} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_y}, \quad d\hat{z} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_z},$$

und definieren einen Wegelementoperator durch

$$d\hat{s}^2 \equiv c^2 d\hat{t}^2 - d\hat{x}^2 - d\hat{y}^2 - d\hat{z}^2,$$

so folgt aus der Invarianz des infinitesimalen Wegelements

$$d\hat{s}^2 = -c^2 \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial E^2} + \hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_z^2} \right)$$

die Klein-Gordon-Gleichung für den reziproken Raum,

$$d\hat{s}^2 \Phi(E, \vec{p}) = s^2 \Phi(E, \vec{p}),$$

wobei $\Phi(E, \vec{p})$ die Wellenfunktion in Abhängigkeit von Energie und Impuls ist. Die Klein-Gordon-Gleichung hat in der Singularität die beiden Eigenwerte $\pm s$, von denen nur der positive physikalisch sinnvoll ist. In einer Dimension gilt die Vereinfachung

$$\left(c^2 \frac{\partial^2}{\partial E^2} - \frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \frac{s^2}{\hbar^2} \right) \Phi(E, p_x) = 0,$$

wobei der Wegoperator als multiplikative Konstante anzusehen ist. Wir lösen diese Gleichung in einer Dimension analog zur Klein-Gordon-Gleichung der Raumzeit, wobei die Lösung gegeben ist durch

$$\Phi(E, p_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} \Re \int e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} e^{\frac{i}{\hbar}(tE - xp_x)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} \int e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \cos \frac{tE - xp_x}{\hbar} dx.$$

Die zweite energetische Ableitung ergibt sich zu

¹ Im Unterschied zur Quantenmechanik müssen in der Relativitätstheorie differentielle Operatoren verwendet werden.

Physikaufgabe 59

$$\frac{\partial^2 \Phi(E, p_x)}{\partial E^2} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int \frac{t^2}{\hbar^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \cos \frac{tE - xp_x}{\hbar} dx.$$

Die zweite Impulsableitung der Impuls-Energie-Wellenfunktion ist gegeben durch

$$\frac{\partial^2 \Phi(E, p_x)}{\partial p_x^2} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int \frac{x^2}{\hbar^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \cos \frac{tE - xp_x}{\hbar} dx.$$

In die reziproke Klein-Gordon-Gleichung eingesetzt erhalten wir

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x \hbar^2} \int (c^2 t^2 - x^2 - s^2) e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \cos \frac{tE - xp_x}{\hbar} dx = 0,$$

was wegen $s^2 = c^2 t^2 - x^2$ identisch erfüllt ist. Auch der Sinus ist Lösung. Die allgemeine Lösung für $E = 0$ und $p_x = 0$ gilt am Ende des Weltzyklus, der gleichzeitig der Anfang eines neuen Zyklus ist. Daher ist der achtdimensionale Raum in sich geschlossen. Das hat folgende auf eins normierte Amplitude zur Folge:

$$\Phi(0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} dx = 1,$$

womit allgemein gilt:

$$\Phi(E, p_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \Phi(0, 0) \int e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} e^{i(tE - xp_x)} dx.$$