

Physikaufgabe 57

[Home](#) | [Startseite](#) | [Impressum](#) | [Kontakt](#) | [Gästebuch](#)

Aufgabe: Leiten Sie die „Klein-Gordon-Gleichung“ für den reziproken Raum her, lösen Sie sie für die Singularität und ziehen Sie entsprechende Schlußfolgerungen in bezug auf einen „Raumsprung“.

Lösung: Für $p = 0$ folgt aus der differentiellen Energie-Impuls-Relation

$$dp^2 = \frac{dE^2}{c^2} - dp_x^2 - dp_y^2 - dp_z^2$$

aufgrund der Invarianz des infinitesimalen Impulsoperators

$$d\hat{p}^2 \equiv \frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

die Klein-Gordon-Gleichung der Raumzeit:

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{p^2}{\hbar^2} \right) \psi(t, \vec{r}) = 0.$$

Dabei haben wir die Definitionen des differentiellen Impuls- und Energieoperators

$$d\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad d\hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, \quad d\hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}, \quad d\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

verwendet und von dem Umstand Gebrauch gemacht, daß die Klein-Gordon-Gleichung eine Eigenwertgleichung ist:

$$d\hat{p}^2 \psi(t, \vec{r}) = p^2 \psi(t, \vec{r}).$$

Mit Hilfe des Laplace-Operators

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

können wie diese Gleichung einfacher schreiben als

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \frac{p^2}{\hbar^2} \right) \psi(t, \vec{r}) = 0.$$

Für $p = 0$ hingegen folgt aus der Energie- Impuls-Relation aufgrund der Invarianz des infinitesimalen Wegelements

$$ds^2 = c^2 \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial E^2} - \hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_z^2} \right)$$

Physikaufgabe 57

die Klein-Gordon-Gleichung des reziproken Raums

$$\left(c^2 \frac{\partial^2}{\partial E^2} - \frac{\partial^2}{\partial p_x^2} - \frac{\partial^2}{\partial p_y^2} - \frac{\partial^2}{\partial p_z^2} + \frac{s^2}{\hbar^2} \right) \Phi(E, \vec{p}) = 0,$$

wobei wir die Definitionen des Orts- und Zeitoperators

$$\hat{x} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_x} \quad \hat{y} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_y} \quad \hat{z} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_z} \quad \hat{t} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial E}$$

verwendet haben. Mit Hilfe des Laplace-Operators bzgl. des Impulses

$$\Delta_p \equiv \nabla_p^2 = \frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_z^2}$$

können wir die Wellengleichung des reziproken Raums schreiben als

$$\left(c^2 \frac{\partial^2}{\partial E^2} - \Delta_p + \frac{s^2}{\hbar^2} \right) \Phi(E, \vec{p}) = 0.$$

In der Singularität wird die Wellenlänge aufgrund des Potentialwalls verschwindender Wellenlänge gleich null. Damit lautet die homogene Klein-Gordon-Gleichung des reziproken Raums

$$c^2 \frac{\partial^2}{\partial E^2} \Phi(E, \vec{p}) - \Delta_p \Phi(E, \vec{p}) = 0.$$

Wir lösen diese Gleichung in einer Dimension analog zur Klein-Gordon-Gleichung der Raumzeit, d.h.

$$c^2 \frac{\partial^2}{\partial E^2} \Phi(E, p_x) - \frac{\partial^2}{\partial p_x^2} \Phi(E, p_x) = 0,$$

wobei die Lösung gegeben ist durch

$$\Phi(E, p_x) = \Re \int g(x) e^{\frac{i}{\hbar}(tE - xp_x)} dx = \int g(x) \cos \frac{tE - xp_x}{\hbar} dx.$$

Die erste energetische Ableitung ergibt sich zu

$$\frac{\partial \Phi(E, p_x)}{\partial E} = \int g(x) \frac{\partial}{\partial E} \cos \frac{tE - xp_x}{\hbar} dx = -\frac{t}{\hbar} \int g(x) \sin \frac{tE - xp_x}{\hbar} dx,$$

gefolgt von der zweiten

$$\frac{\partial^2 \Phi(E, p_x)}{\partial E^2} = -\frac{t}{\hbar} \int g(x) \frac{\partial}{\partial t} \sin \frac{tE - xp_x}{\hbar} dx = -\frac{t^2}{\hbar^2} \int g(x) \cos \frac{tE - xp_x}{\hbar} dx.$$

Die erste Impulsableitung der Energie- Impuls-Wellenfunktion ist

Physikaufgabe 57

$$\frac{\partial \Phi(E, p_x)}{\partial p_x} = \int g(x) \frac{\partial}{\partial p_x} \cos \frac{tE - xp_x}{\hbar} dx = \frac{1}{\hbar} \int g(x) x \sin \frac{tE - xp_x}{\hbar} dx,$$

und die zweite Ableitung lautet

$$\frac{\partial^2 \Phi(E, p_x)}{\partial p_x^2} = \int g(x) \frac{\partial}{\partial p_x} \sin \frac{tE - xp_x}{\hbar} dx = -\frac{1}{\hbar^2} \int g(x) x^2 \cos \frac{tE - xp_x}{\hbar} dx.$$

In die reziproke Klein-Gordon-Gleichung eingesetzt erhalten wir

$$c^2 \frac{\partial^2}{\partial E^2} \Phi(E, p_x) - \frac{\partial^2 \Phi(E, p_x)}{\partial p_x^2} = -\frac{1}{\hbar^2} \int g(x) (c^2 t^2 - x^2) \cos \frac{tE - xp_x}{\hbar} dx = 0,$$

woraus sich wegen $x = ct$ die Energie-Impuls-Wellenfunktion des reziproken Raums in ihrer einfachsten Form ergibt:

$$\Phi(E, p_x) = \int g(x) \cos \frac{tE - xp_x}{\hbar} dx = \left\{ \int g(x) dx \right\} \cos \left[\frac{ct}{\hbar} \left(\frac{E}{c} - p_x \right) \right].$$

Während im reziproken Raum die Zeit eine Erhaltungsgröße ist, bleibt wegen $E = p_x c$ in der Singularität der Raumzeit die Energie erhalten:

$$\psi(t, x) = \int f(p_x) \cos \frac{Et - p_x x}{\hbar} dp_x = \left\{ \int f(p_x) dp_x \right\} \cos \left[\frac{E}{\hbar c} (ct - x) \right].$$

In der Singularität selbst gilt

$$\Phi(0, 0) = \int g(x) dx.$$

Nehmen wir die Amplitudenverteilung als normalverteilt bzw. gaußförmig an, so können wir den Betrag der Wellenfunktion mittels der Definition

$$g(x) \equiv \delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{p_x}{\hbar} e^{-\frac{2p_x^2 x^2}{\hbar^2}}$$

in der Singularität auf eins normieren:

$$\Phi(0, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{p_x}{\hbar} \int e^{-\frac{2p_x^2 x^2}{\hbar^2}} dx = 1.$$

Mit der Gaußverteilung aufgrund stochastischer Zerfallsprozesse von Ort und Impuls, Energie und Zeit haben wir angenommen, daß auch die reziproke Impuls-Energie-Wellenfunktion aufgrund der Unschärferelation in der Lage ist, die Potentialbarriere der Singularität zu durchtunneln. Folglich erhalten wir mittels

$$\Phi(E, p_x) = \Phi(0, 0) \cos \left[\frac{ct}{\hbar} \left(\frac{E}{c} - p_x \right) \right].$$

eine spezielle Lösung der homogenen reziproken Klein-Gordon-Gleichung. Die Sinusfunktion

$$\Phi(E, p_x) = \Phi(0, 0) \sin \left[\frac{ct}{\hbar} \left(\frac{E}{c} - p_x \right) \right].$$

ist ebenfalls eine Lösung, so daß wir die allgemeine Lösung in komplexer Notation schreiben können als

$$\Phi(E, p_x) = \Phi(0, 0) e^{i \frac{ct}{\hbar} \left(\frac{E}{c} - p_x \right)}.$$

Die konjugiert-komplexe Wellenfunktion

$$\bar{\Phi}(E, p_x) = \bar{\Phi}(0, 0) e^{-i \frac{ct}{\hbar} \left(\frac{E}{c} - p_x \right)}$$

gereicht uns zur Bildung des Betragsquadrats über das Produkt

$$\Phi(E, p_x) \bar{\Phi}(E, p_x) = \Phi(0, 0) \bar{\Phi}(0, 0) e^{i \frac{ct}{\hbar} \left(\frac{E}{c} - p_x \right)} e^{-i \frac{ct}{\hbar} \left(\frac{E}{c} - p_x \right)}.$$

Damit können wir ebenso wie für die Raumzeit auf eins normieren:

$$|\Phi(E, p_x)|^2 = \Phi(E, p_x) \bar{\Phi}(E, p_x) = \Phi(0, 0) \bar{\Phi}(0, 0) = |\Phi(0, 0)|^2 = 1,$$

womit die Wahrscheinlichkeit, Energie und Impuls eines Teilchen irgendwo im reziproken Raum zu finden, genauso groß ist wie in der Singularität.

Der reziproke Raum ist unanschaulich, aber er ist für das Verständnis der relativistischen Weg- und Impulsinvarianz unverzichtbar. Ein vierdimensionaler Raum reicht dafür allein nicht hin. Die Zeit ist ein Begriff, der nur außerhalb der Singularität einen Sinn ergibt. Der Raum ist an die Zeit gekoppelt, ohne Zeit würde auch er nicht existieren. Das gleiche gilt für Energie und Impuls. Wir brauchen einen materiellen Körper nur auf Lichtgeschwindigkeit zu bringen, um ihn irgendwo in der Raumzeit durch Verlangsamung neu entstehen zu lassen, auf daß er wieder materielle Gestalt annimmt. Seine Energie geht dabei nicht verloren. Was mit seiner Struktur geschieht, wissen wir nicht. Sie krümmt sich aber aufgrund der Gravitation unendlich. Masse und Materie sind überhaupt nur für Geschwindigkeiten unterhalb der Lichtgeschwindigkeit plausibel. Was sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, verliert an Raum, weil sich seine Länge zu null kontrahiert. Wer sich selbst mit dem Licht bewegt, bewegt sich zu nichts hin und von nichts weg. Die einzige Chance, aus diesem Zustand herauszukommen, ist Energie abzugeben. Wie das aber möglich sein soll, ist ein anderes Rätsel.