**Aufgabe:** Zeigen Sie mit Hilfe der Diracschen Delta-Funktion und der Heisenbergschen Unschärferelation, daß das All aus zwei Singularitäten besteht und notwendig in einer enden und in der anderen wieder beginnen muß.

**Lösung:** Zusammen mit dem Massen- und dem Impulserhaltungssatz besagen die relativistischen Beziehungen zwischen Energie und Masse einerseits und zwischen Energie und Impuls andererseits, daß die nachfolgend definierten Integrale

$$\frac{E}{c^2} = \int \rho(\vec{r}) d^3 r, \qquad \frac{E}{c} = \int \rho_p(\vec{p}) d^3 p$$

auch in der Singularität gelten müssen, womit eine Vereinheitlichung von Licht und Materie sinnvoll erscheint. Darin sind $\rho(\vec{r})$ und $\rho_p(\vec{p})$ die Verteilungen der Dichte und des Impulses im Universum, $E$ seine Energie und $c$ die Lichtgeschwindigkeit. Die Dichten gehorchen wie so oft einer Normalverteilung um den Erwartungswert Null, d.h.

$$\rho(\vec{r}) = m\delta(\vec{r}) \quad \text{und} \quad \rho_p(\vec{p}) = p\delta(\vec{p}),$$

wobei die Integrale über diese Dichten auf Eins normiert sind:

$$\int \delta(\vec{r}) d^3 r = 1 \quad \text{bzw.} \quad \int \delta(\vec{p}) d^3 p = 1.$$

Dabei kann die Gaußverteilung durch eine dreidimensionale Delta-Funktion

$$\delta(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3 \sigma_x \sigma_y \sigma_z} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}}$$

ausgedrückt werden, die sich wegen der Unabhängigkeit der Variablen als Produkt aus drei eindimensionalen Delta-Funktionen

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$$

usw. schreiben läßt. Da zudem die Mittelwerte wegen $\langle x \rangle = \langle y \rangle = \langle z \rangle = 0$ identisch verschwinden, sind die Standardabweichungen durch die Wurzeln der quadratischen Mittelwerte gegeben:

$$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle}, \quad \sigma_y = \sqrt{\langle y^2 \rangle}, \quad \sigma_z = \sqrt{\langle z^2 \rangle}.$$

Analog definieren wir auch für den Impuls eine Gaußverteilung

 

$$\delta(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3 \sigma_{p,x}\sigma_{p,y}\sigma_{p,z}} e^{-\frac{p_x^2}{2\sigma_{p,x}^2}} e^{-\frac{p_y^2}{2\sigma_{p,y}^2}} e^{-\frac{p_z^2}{2\sigma_{p,z}^2}},$$

wobei wegen $\langle p_x \rangle = \langle p_y \rangle = \langle p_z \rangle = 0$ auch hier bei maximaler Ausdehnung des Alls[1] gilt:

$$\sigma_{p,x} = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle}, \quad \sigma_{p,y} = \sqrt{\langle p_y^2 \rangle}, \quad \sigma_{p,z} = \sqrt{\langle p_z^2 \rangle}.$$

Gemäß den Heisenbergschen Unschärferelationen

$$\Delta x \Delta p_x = \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta y \Delta p_y = \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta z \Delta p_z = \frac{\hbar}{2}$$

kann der Ort niemals als scharf angesehen werden, ohne daß sich dabei der Impuls verbreitert; also können wir in der Nähe der Singularität

$$x = \frac{\hbar}{2\sigma_{p,x}}, \quad y = \frac{\hbar}{2\sigma_{p,y}}, \quad z = \frac{\hbar}{2\sigma_{p,z}}$$

setzen. Das folgt direkt aus der Impulsunschärfe

$$\Delta p_x = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2} = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle} = \sigma_{p,x}$$

und der Ortsunschärfe

$$\Delta x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \langle x^2 \rangle = x^2.$$

Wir transformieren nachfolgend die Delta-Funktion in den Impulsraum. Bezeichne etwa $\vec{r}$ einen Punkt auf dem „Rand“ des Universums[2], d.h. für $v = c,$ so gilt

$$\begin{aligned}
\int \rho(\vec{r}) dV &= \frac{m}{\sqrt{2\pi}^3 \sigma_x \sigma_y \sigma_z} \iiint e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}} dx\,dy\,dz \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}^3 m \iiint e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}} d\frac{x}{2\sigma_x} d\frac{y}{2\sigma_y} d\frac{z}{2\sigma_z} \\
&= \frac{m}{\sqrt{2\pi}^3} \frac{2x}{\hbar} \frac{2y}{\hbar} \frac{2z}{\hbar} \iiint e^{-\frac{(2x)^2 p_x^2}{2\hbar^2}} e^{-\frac{(2y)^2 p_y^2}{2\hbar^2}} e^{-\frac{(2z)^2 p_z^2}{2\hbar^2}} dp_x dp_y dp_z.
\end{aligned}$$

Setzen wir die Unschärferelationen

[1] Also unmittelbar vor dem Urknall

[2] Wobei wir eigentlich vierdimensional rechnen müßten

 

$$x = \frac{\hbar}{2\sigma_{p,x}}, \quad y = \frac{\hbar}{2\sigma_{p,y}}, \quad z = \frac{\hbar}{2\sigma_{p,z}}$$

ein, so folgt

$$\int \rho(\vec{r}) d^3 r = \frac{m}{\sqrt{2\pi}^3 \sigma_{p,x}\sigma_{p,y}\sigma_{p,z}} \iiint e^{-\frac{p_x^2}{2\sigma_{p,x}^2}} e^{-\frac{p_y^2}{2\sigma_{p,y}^2}} e^{-\frac{p_z^2}{2\sigma_{p,z}^2}} dp_x dp_y dp_z$$

bzw. die Delta-Funktion in Impulsdarstellung im Impulsraum

$$\delta(\vec{p}) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3 \sigma_{p,x}\sigma_{p,y}\sigma_{p,z}} e^{-\frac{1}{2\sigma_{p,x}^2} p_x^2} e^{-\frac{1}{2\sigma_{p,y}^2} p_y^2} e^{-\frac{1}{2\sigma_{p,z}^2} p_z^2},$$

wobei sich herausstellt, daß die in den reziproken Raum transformierte Delta-Funktion nichts anderes ist als das Produkt

$$\delta(\vec{p}) = \delta(p_x)\delta(p_y)\delta(p_z).$$

Daher kann die Delta-Funktion in Impulsdarstellung im Ortsraum mit Hilfe der Unschärferelationen auch geschrieben werden als

$$\delta(\vec{p}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}^3 \frac{xyz}{\hbar^3} e^{-\frac{2x^2}{\hbar^2} p_x^2} e^{-\frac{2y^2}{\hbar^2} p_y^2} e^{-\frac{2z^2}{\hbar^2} p_z^2}.$$

Mit

$$\delta(p_x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x}{\hbar} e^{-\frac{2x^2 p_x^2}{\hbar^2}}$$

über den Impulsraum integriert ist die Delta-Funktion dort ebenfalls auf Eins normiert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(p_x) dp_x = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2x^2 p_x^2}{\hbar^2}} dp_x = 1.$$

Umgekehrt gilt das freilich auch für den Impuls. Gemäß den Heisenbergschen Unschärferelationen kann auch der Impuls niemals als scharf angesehen werden, ohne daß sich der Ort dabei verbreitert; also können wir in der Nähe der Impuls-Singularität

$$p_x = \frac{\hbar}{2\sigma_x}, \quad p_y = \frac{\hbar}{2\sigma_x}, \quad p_z = \frac{\hbar}{2\sigma_x}$$

setzen. Das folgt direkt aus der Impulsunschärfe

$$\Delta p_x^2 = \left\langle p_x^2 \right\rangle - \left\langle p_x \right\rangle^2 = \left\langle p_x^2 \right\rangle = p_x^2$$

 

und der Ortsunschärfe

$$\Delta x = \sqrt{\left\langle x^2 \right\rangle - \left\langle x \right\rangle^2} = \sqrt{\left\langle x^2 \right\rangle} = \sigma_x .$$

Aus Symmetriegründen transformieren wir die Delta-Funktion in Impulsdarstellung aus dem Impulsraum in den Ortsraum. Bezeichne etwa $\vec{p}$ einen Punkt auf dem „Impulsrand“ des Universums, d.h. für $v = 0,$ so gilt

$$\begin{aligned}
\int \rho_p(\vec{p}) d^3 p &= \frac{p}{\sqrt{2\pi}^3 \sigma_{p,x}\sigma_{p,y}\sigma_{p,z}} \iiint e^{-\frac{p_x^2}{2\sigma_{p,x}^2}} e^{-\frac{p_y^2}{2\sigma_{p,y}^2}} e^{-\frac{p_z^2}{2\sigma_{p,z}^2}} dp_x dp_y dp_z \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}^3 p \iiint e^{-\frac{p_x^2}{2\sigma_{p,x}^2}} e^{-\frac{p_y^2}{2\sigma_{p,y}^2}} e^{-\frac{p_z^2}{2\sigma_{p,z}^2}} d\frac{p_x}{2\sigma_{p,x}} d\frac{p_y}{2\sigma_{p,y}} d\frac{p_z}{2\sigma_{p,z}} \\
&= \frac{p}{\sqrt{2\pi}^3} \frac{2p_x}{\hbar} \frac{2p_y}{\hbar} \frac{2p_z}{\hbar} \iiint e^{-\frac{(2p_x)^2 x^2}{2\hbar^2}} e^{-\frac{(2p_y)^2 y^2}{2\hbar^2}} e^{-\frac{(2p_z)^2 z^2}{2\hbar^2}} dx dy dz.
\end{aligned}$$

Setzen wir die Unschärferelationen

$$p_x = \frac{\hbar}{2\sigma_x}, \quad p_y = \frac{\hbar}{2\sigma_x}, \quad p_z = \frac{\hbar}{2\sigma_x}$$

ein, so folgt daraus

$$\int \rho_p(\vec{p}) d^3 p = \frac{p}{\sqrt{2\pi}^3 \sigma_x \sigma_y \sigma_z} \iiint e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}} dx dy dz$$

bzw. die Deltafunktion in Ortsdarstellung im Ortsraum

$$\delta(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3 \sigma_x \sigma_y \sigma_z} e^{-\frac{1}{2\sigma_x^2}x^2} e^{-\frac{1}{2\sigma_y^2}y^2} e^{-\frac{1}{2\sigma_z^2}z^2} .$$

Diese kann in Ortsdarstellung im Impulsraum mit Hilfe der Unschärferelationen auch geschrieben werden als

$$\delta(\vec{r}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}^3 \frac{p_x p_y p_z}{\hbar^3} e^{-\frac{2p_x^2}{\hbar^2}x^2} e^{-\frac{2p_y^2}{\hbar^2}y^2} e^{-\frac{2p_z^2}{\hbar^2}z^2} .$$

Für das Folgende reicht es, die Grenzübergänge jeweils nur in einer Dimension zu zeigen. Dabei zeigt es sich, daß der Raum zwei Singularitäten aufweist, eine für die Raumzeit und eine zweite für die Impulsenergie, je nachdem, ob wir die Ortsdarstellung oder die Impulsdarstellung wählen. Da der Raum einen Drehimpuls besitzt, stellt er ein sogenanntes beschleunigtes Bezugssystem dar, in dem wegen der Drehimpulserhaltung auch die Heisenbergschen Unschärferelationen für Ort und Impuls gelten müssen. Die Normalverteilungen von Ort und Impuls schwanken zwischen einer Delta-Funktion bei minimaler Entropie und einer Gleichverteilung im Falle maximaler Entropie. Bei minimaler Entropie werden die Standardabweichungen sehr klein, obwohl die jeweiligen Kehrwerte aufgrund der Heisenbergschen Unschärferelationen dennoch nicht unendlich werden können. Umgekehrt können die Standardabweichungen ebenfalls nicht unendlich werden, weil der Raum eine endliche Ausdehnung besitzt. Die Gaußverteilung stellt daher nur eine Näherungslösung dar, weil unendliche Werte niemals angenommen werden können. Die Gleichverteilung hat also immer noch eine nichtverschwindende Amplitude, und sei sie auch noch so klein. Weil aber die Gaußverteilung nur einen geringen Fehler macht, wollen wir sie dennoch verwenden.

Der Grenzwert der Deltafunktion in Ortsdarstellung in der Singularität des Ortsraums

$$\lim_{\sigma_x \to 0} \delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\sigma_x \to 0} \frac{1}{\sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} = \infty$$

ist äquivalent mit dem Grenzwert der Deltafunktion in Ortsdarstellung im Unendlichen des Impulsraums

$$\lim_{p_x \to \infty} \delta(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{p_x \to \infty} \frac{p_x}{\hbar} e^{-\frac{2x^2 p_x^2}{\hbar^2}} = \infty$$

und entspricht der dichtesten Massekonzentration und damit minimaler Entropie im Ortsraum kurz nach dem Urknall.

Der Grenzwert der Deltafunktion in Ortsdarstellung im Unendlichen des Ortsraums

$$\lim_{\sigma_x \to \infty} \delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\sigma_x \to \infty} \frac{1}{\sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} = 0$$

ist äquivalent mit dem Grenzwert der Deltafunktion in Ortsdarstellung in der Singularität des Impulsraums

$$\lim_{p_x \to 0} \delta(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{p_x \to 0} \frac{p_x}{\hbar} e^{-\frac{2x^2 p_x^2}{\hbar^2}} = 0$$

und entspricht einer gleichverteilten Masse geringster Dichte und damit maximaler Entropie im Ortsraum kurz vor dem Urknall.

Der Grenzwert der Deltafunktion in Impulsdarstellung in der Singularität des Impulsraums

$$\lim_{\sigma_{p,x} \to 0} \delta(p_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\sigma_{p,x} \to 0} \frac{1}{\sigma_{p,x}} e^{-\frac{p_x^2}{2\sigma_{p,x}^2}} = \infty$$

ist äquivalent mit dem Grenzwert der Deltafunktion in Impulsdarstellung im Unendlichen des Ortsraums

 

$$\lim_{x\to\infty}\delta(p_x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\hbar}e^{-\frac{2p_x^2x^2}{\hbar^2}}=\infty$$

und entspricht der Deltaverteilung des Impulses und damit minimaler Entropie im Impulsraum kurz vor dem Urknall.

Auch der Grenzwert der Deltafunktion in Impulsdarstellung im Unendlichen des Impulsraums

$$\lim_{\sigma_{p,x}\to\infty}\delta(p_x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{\sigma_{p,x}\to\infty}\frac{1}{\sigma_{p,x}}e^{-\frac{p_x^2}{2\sigma_{p,x}^2}}=0$$

ist äquivalent mit dem Grenzwert der Deltafunktion in Impulsdarstellung in der Singularität des Ortsraums

$$\lim_{x\to 0}\delta(p_x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\hbar}e^{-\frac{2p_x^2x^2}{\hbar^2}}=0$$

und entspricht der Gleichverteilung des Impulses und damit maximaler Entropie im Impulsraum kurz nach dem Urknall.

Wenn also die Entropie im Ortsraum kurz nach dem Urknall ein Minimum annimmt, erreicht sie im Impulsraum ein Maximum. Die Entropien beider Räume addieren sich nach dem Energieerhaltungssatz zur konstanten Gesamtenergie. Wenn umgekehrt kurz vor dem Urknall die Masse im Ortsraum gleichverteilt, die Dichte minimal und damit die Entropie maximal ist, ist die Entropie im reziproken Impulsraum minimal.

In der Singularität im Ortsraum hat $\delta(\vec{r})$ in der Ortsdarstellung die Form einer Absorptionskurve, was wegen der Proportionalität zur Dichte auch für die kinetische Energie gilt, während $\delta(\vec{r})$ im Impulsraum und damit die potentielle Energie die Form einer Dispersionskurve besitzt. Das erkennt man anhand der Ortsdarstellung von $\delta(\vec{r})$ im Impulsraum an der Proportionalität zu $p_x$, $p_y$ und $p_z$. Umgekehrt hat $\delta(\vec{p})$ in der Singularität im Impulsraum in der Impulsdarstellung die Form einer Absorptionskurve, also wegen der Proportionalität zum Impuls auch die potentielle Energie, während $\delta(\vec{p})$ in der Impulsdarstellung im Ortsraum die Form einer Dispersionskurve besitzt. Das erkennt man an der Proportionalität zu $x$, $y$ und $z$.

Während sich das All ausdehnt, unterliegen beide Dichten einer gewöhnlichen dreidimensionalen[3] Normalverteilung, die Delta-Funktion zerfällt sozusagen beim Urknall. Bei „unendlicher“ Ausdehnung des Raums, d.h. für $\sigma_x\to\infty$ usw., geht die kinetische Energie gegen Null, da die Dichte sehr niedrig, die Masse praktisch verschwunden und der Raum sehr groß geworden ist. Ebenso wird auch die Delta-Funktion $\delta(\vec{r})$ zu einer konstanten, wenn auch niedrigen Gleichverteilung. Im reziproken Raum hingegen baut sich die potentielle Energie zu einer

[3] Eigentlich vierdimensionalen

 

Delta-Funktion auf, weil dort der reziproke Raum sehr klein wird. Folglich muß es allein aufgrund der Tatsache, daß kinetische Energie in potentielle umgewandelt wird,[4] nach Erreichen der Lichtgeschwindigkeit zu einem weiteren Urknall kommen. Nach dem Wärmetod im Ortsraum, nachdem alle Wärme in Arbeit umgewandelt wurde, erfolgt in der Singularität naturgemäß eine Entropieumkehr, bei der kinetische Energie bzw. Wärme entsteht, was als ausreichende Ursache für die nun folgende neue Expansion angesehen werden kann. Weil das neue Universum aus dem reziproken Raum heraus entsteht, hat es unmittelbar nach seiner Entstehung auch die größte Entropie und die höchste Temperatur bzw. Wärme, aber noch keine Arbeit verrichtet. Während das All „arbeitet" und expandiert, kühlt es sich ab, es entstehen in der Kälte des Raums hochgeordnete Strukturen. Die sinkende Entropie wird dabei als unverbrauchte Energie im reziproken Raum angereichert, wie das ebenfalls bei einem Schwarzen Loch der Fall ist. Ist alle kinetische Energie in der Raumzeit von der Singularität verschluckt, ist die potentielle im reziproken Raum maximal; er kollabiert, weil die Entropie in einem relativistischen System stets bestrebt ist abzunehmen und die Natur keine Sprünge bzw. Unstetigkeiten duldet. Da der reziproke Raum aus Energie und Impuls besteht, während die Raumzeit dann leer ist und keine Entropie bzw. Wärme mehr besitzt, muß unter dem Druck von Energie und Impuls eine vollständige Konvertierung in unverbrauchte Entropie[5] erfolgen, damit die Zeit erneut zu laufen beginnen und der Raum sich wieder ausdehnen kann. Der achtdimensionale Raum besitzt also aufgrund der Gravitation zwei Singularitäten, eine für die Masse bzw. die kinetische Energie und eine zweite für den Impuls bzw. die potentielle Energie des Lichts oder, umfassender noch, die elektromagnetische Strahlung.

---

[4] Warum und wieso muß nicht geklärt werden, weil das nach dem Zweiten Hauptsatz der Thermodynamik nicht anders sein kann.

[5] Bei extrem hohen Temperaturen und einer Gleichverteilung der frisch entstanden Materie wie in einem idealen Gas

 