

## Physikaufgabe 53

---

[Home](#) | [Startseite](#) | [Impressum](#) | [Kontakt](#) | [Gästebuch](#)

**Aufgabe:** Beweisen Sie, daß das Weltall eine endliche Ausdehnung hat, jeweils ein endliches Alter erreicht, und daß es keine Ursache hat.

**Lösung:** Beginnend mit dem Urknall breitet sich das Licht radial von einer Singularität ausgehend mit Lichtgeschwindigkeit aus. Nichts kann sich schneller bewegen als das Licht, weder Materie noch Strahlung. Wo kein Licht hinkommt, ist auch nichts, weder Raum noch Zeit noch Gravitation, die außerhalb des Alls<sup>1</sup> auch noch gar nicht angekommen sein könnte. Es wäre aber falsch, das Vakuum als Nichts zu bezeichnen, weil es erfüllt ist von elektromagnetischer Strahlung und somit von Energie. Das Nichts hingegen könnte gar nicht fluktuieren, weil in ihm keine Energie steckt, wohl aber im Vakuum, dem leeren Raum, der erst durch die Ausbreitung des Lichts aufgespannt wurde. Daher erübrigt sich die Frage, was um das Weltall herum ist. Mit Hilfe der im Vakuum vorhandenen Energie kann es z.B. zu einer Proton-Antiproton-Reaktion kommen, auch wenn sich die beiden Teilchen anschließend wieder annihilieren; ihre Energie ist trotzdem nicht weg. Liegt diese Paarbildung ausgerechnet auf dem Schwarzschild-Radius eines Schwarzen Lochs, kann ein Teilchen überleben, das andere nicht. Das freie Proton kann allein jedenfalls nicht annihilieren und bleibt Masse.<sup>2</sup> Durch Materie-Antimaterie-Reaktionen können derart hohe Energien freigesetzt werden, daß die Singularität buchstäblich auseinanderfliegt. Dieses Phänomen nennt man Urknall. Einzig Masse kann Geschwindigkeit annehmen, die langsamer ist als die Ausbreitung des Lichts. Legen wir nun in der Singularität ein Inertialsystem fest, so hängen Raum und Zeit über das infinitesimale Längenelement  $ds$  und das infinitesimale Eigenzeitelement  $d\tau$  mit der Lichtgeschwindigkeit zusammen:

$$c = \frac{ds}{d\tau},$$

wobei sowohl das Zeitelement als auch das Wegelement

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Invarianten der Bewegung sind und die Koordinaten  $x, y, z$  und  $t$  sich auf irgendeinen Punkt im Inertialsystem beziehen. Dieser Punkt kann auch die Singularität selbst sein, wenn der umgebende Raum zu ebendieser Singularität zusammengeschrumpft ist. Dabei ist die Zeit  $t$  mit der Eigenzeit  $\tau$ , d.h. der Zeit in einem sich mit der Geschwindigkeit  $v$  relativ zur Singularität bewegenden System, durch folgende Relation verknüpft:

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Nach dem Urknall expandiert der Raum, aber er kann sich nicht weiter ausdehnen, als das Licht seit dem Urknall gekommen ist. Angenommen, die Ausdehnungsgeschwindigkeit des Weltalls, also irgendeines Punkts ganz am Rand des Universums, hätte Lichtgeschwindigkeit erreicht;

---

<sup>1</sup> Wenn sie sich als Welle ausbreitet

<sup>2</sup> Wenn das Weltall insgesamt ungeladen ist, fehlt allerdings das zugehörige Elektron.

## Physikaufgabe 53

dann würde sich seine Eigenzeit nicht mehr ändern und eine weitere Ausdehnung wäre ausgeschlossen. Die Distanz  $s$  bezeichnen wir in diesem Fall als die maximale Größe des Alls. Setzen wir nun das infinitesimale Linienelement und das Eigenzeitdifferential in die Definition der Lichtgeschwindigkeit ein, so erhalten wir den Ausdruck

$$\frac{ds^2}{d\tau^2} = \frac{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}{dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left( c^2 - \left( \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} \right) \right) = c^2.$$

Mit der Definition der Geschwindigkeit im Inertialsystem

$$v^2 = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}$$

folgt daraus im Grenzfall  $v = 0$ , also kurz nach dem Urknall,

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{ds^2}{d\tau^2} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} (c^2 - v^2) = c^2.$$

Solange es nur einen Punkt im Universum gibt, ist nach obiger Formel

$$c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt^2 \Leftrightarrow dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0 \Leftrightarrow dx^2 = dy^2 = dz^2 = 0,$$

und daraus folgt

$$(dx = dy = dz = 0) \wedge (ds = c dt) \Leftrightarrow (x = y = z = t = 0) \wedge (s = 0).$$

Der Raum dehnt sich zunächst proportional zur Zeit  $t$  mit Lichtgeschwindigkeit aus. Sobald sich aber aufgrund der Materie, die nun den Raum ausfüllt, eine Eigenzeit für den größten Durchmesser, den der Raum bis dahin erreicht hat, einstellt, verkürzt sich der anfangs noch nicht gekrümmte Raum sogleich in Ausbreitungsrichtung des Lichts um den Betrag

$$v dt = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Es dürfte klar sein, daß wenn  $v$  den Wert der Lichtgeschwindigkeit erreicht, Zeit und Eigenzeit wegen  $\tau = t = \text{const}$  erneut übereinstimmen müssen<sup>3</sup>, weil sich die Differenzgeschwindigkeit bei maximaler Ausdehnung des Raumes bei der Grenzwertbildung heraushebt,

$$\lim_{v \rightarrow c} \frac{ds^2}{d\tau^2} = c^2 \lim_{v \rightarrow c} \frac{c^2 - v^2}{c^2 - v^2} = c^2 \lim_{v \rightarrow c} \frac{c - v}{c - v} = c^2,$$

und sich aufgrund der folgenden Relationen am Universum nichts mehr ändert:

---

<sup>3</sup> Der gesamte Raum wird dann sozusagen zu einer Singularität.

## Physikaufgabe 53

---

$$c^2 d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 d\tau^2 \Leftrightarrow dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0 \Leftrightarrow dx^2 = dy^2 = dz^2 = 0.$$

Analog zu oben erhalten wir für den Grenzfall  $v = c$  die Relationen

$$(dx = dy = dz = 0) \wedge (ds = cd\tau = 0) \Leftrightarrow (x = y = z = \tau = \text{const}) \wedge (s = \text{const}).$$

Soweit folgt bislang alles aus den Gleichungen der Speziellen Relativitätstheorie. Die am Ende erreichte Größe des Alls und sein maximales Alter lassen sich daraus allerdings noch nicht ermitteln. Bis zum Anfang des Universums müßten wir theoretisch allerdings zurückblicken können, wenn wir uns nicht ausgerechnet auf seinem Rand befinden, zumal die vom Urknall herrührende 3-K-Strahlung meßbar ist, uns also bereits erreicht hat.

Wir verfolgen nun im Anschluß noch einen weiteren Ansatz, nämlich über den reziproken Raum. Ist die Lichtgeschwindigkeit durch das infinitesimale Wegdifferential  $ds = cd\tau$  gegeben, so liefert das infinitesimale Impulsdifferential

$$dp = \frac{dE}{c}$$

eine äquivalente relativistische Beschreibung, in der das quadratische Impulsdifferential als Vierervektor geschrieben werden kann,

$$dp^2 = \frac{dE^2}{c^2} - dp_x^2 - dp_y^2 - dp_z^2,$$

woraus sich der Kehrwert der Lichtgeschwindigkeit im reziproken Raum zu

$$\frac{1}{c^2} = \frac{dp^2}{dE^2} = \frac{\frac{1}{c^2} dE^2 - dp_x^2 - dp_y^2 - dp_z^2}{dE^2}$$

ergibt. Ähnlich zum gewöhnlichen vierdimensionalen Raum mit

$$c^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = c^2$$

gilt im reziproken Raum<sup>4</sup>

$$\frac{1}{c^2} - \left(\frac{dp_x}{dE}\right)^2 - \left(\frac{dp_y}{dE}\right)^2 - \left(\frac{dp_z}{dE}\right)^2 = \frac{1}{c^2}.$$

Kurz nach dem Urknall besteht sämtliche Energie aus kinetischer Energie, daher gilt

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2).$$

---

<sup>4</sup> Wegen des Kehrwerts der Lichtgeschwindigkeit

## Physikaufgabe 53

---

Differenzieren wir diese Gleichung partiell nach den Impulsen,

$$\frac{\partial E}{\partial p_x} = v_x, \quad \frac{\partial E}{\partial p_y} = v_y, \quad \frac{\partial E}{\partial p_z} = v_z,$$

so gilt für die Kehrwerte

$$\frac{\partial p_x}{\partial E} = \frac{1}{v_x}, \quad \frac{\partial p_y}{\partial E} = \frac{1}{v_y}, \quad \frac{\partial p_z}{\partial E} = \frac{1}{v_z}.$$

Diese in das Impulsdifferential eingesetzt ergeben den Ausdruck

$$\frac{dp^2}{dE^2} = \frac{1}{c^2} - \left( \frac{1}{v_x^2} + \frac{1}{v_y^2} + \frac{1}{v_z^2} \right) = \frac{1}{c^2}.$$

Dabei sind Energie und Masse gemäß  $E = mc^2$  zueinander äquivalent. Kurz vor dem nächsten Urknall besteht dann sämtliche Energie aus rein elektromagnetischer Strahlung und es gilt

$$E = pc = c\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}.$$

Mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial E}{\partial p_x} = \frac{p_x c}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}}, \quad \frac{\partial E}{\partial p_y} = \frac{p_y c}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}}, \quad \frac{\partial E}{\partial p_z} = \frac{p_z c}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}}$$

ergeben sich folgende Kehrwerte,

$$\frac{\partial p_x}{\partial E} = \frac{p}{p_x c}, \quad \frac{\partial p_y}{\partial E} = \frac{p}{p_y c}, \quad \frac{\partial p_z}{\partial E} = \frac{p}{p_z c},$$

die eingesetzt in das differentielle Impulselement den Ausdruck

$$\frac{dp^2}{dE^2} = \frac{1}{c^2} - \frac{p^2}{c^2} \left( \frac{1}{p_x^2} + \frac{1}{p_y^2} + \frac{1}{p_z^2} \right) = \frac{1}{c^2}$$

ergeben. Setzen wir zum Zeitpunkt des Urknalls kinetische und potentielle Energie gleich, so folgt daraus

$$\frac{dp^2}{dE^2} = \frac{1}{c^2} - \left( \frac{1}{v_x^2} + \frac{1}{v_y^2} + \frac{1}{v_z^2} \right) = \frac{1}{c^2} - \frac{p^2}{m^2 c^2} \left( \frac{1}{v_x^2} + \frac{1}{v_y^2} + \frac{1}{v_z^2} \right).$$

Natürlich dürfen wir zum Zeitpunkt des Urknalls  $p_x = mv_x$  setzen usw., weil sich genau zu diesem Zeitpunkt die gesamte elektromagnetische Strahlung in Masse und damit in kinetische Energie umwandelt. Wir können daher schreiben:

## Physikaufgabe 53

---

$$\frac{dp^2}{dE^2} = \frac{1}{c^2} - \frac{p^2 c^2}{m^2 c^4} \left[ \left( \frac{dt}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dt}{dy} \right)^2 + \left( \frac{dt}{dz} \right)^2 \right].$$

Da nach der Energie-Impuls-Relation

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$$

zum Zeitpunkt des Urknalls  $m^2 c^4 = p^2 c^2$ , vereinfacht sich diese Gleichung nochmals zu

$$\frac{dp^2}{dE^2} = \frac{1}{c^2} - \left( \frac{dt^2}{dx^2} + \frac{dt^2}{dy^2} + \frac{dt^2}{dz^2} \right) = \frac{1}{c^2}.$$

Das kann allerdings nur gelten, wenn zum Zeitpunkt des Urknalls  $t = \text{const}$  ist, das heißt, wenn die Zeit zu diesem Zeitpunkt stillsteht und damit auch keinerlei kausale Wirkung im klassischen Sinne möglich ist. Das Universum hat also keine Ursache, weil sich potentielle Energie auch gänzlich ohne Ursache in kinetische Energie umwandelt. Diese Umwandlung gehört schlichtweg zum Wesen der Energie und ist eine Folge des Zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik.

Obige Gleichung hat genau zwei Lösungen für konstante raumunabhängige Zeit, und zwar für  $v = 0$  und  $v = c$ . Die erste folgt aus der Definition der Eigenzeit

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = dt$$

und gilt allgemein in der Singularität, weil dort definitionsgemäß  $t = \tau$  ist, die zweite ergibt sich aus der Formel

$$ds = dt \sqrt{c^2 - v^2} = 0,$$

d.h.

$$c = \sqrt{\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}},$$

und gilt für maximale Raumausdehnung  $s = \text{const}$ . Daraus folgt ebenfalls, daß die Zeit endlich ist,

$$d\tau = \frac{ds}{c} = 0,$$

d.h.  $\tau = \text{const}$ , weil der Raum sich nicht mehr weiter vergrößern kann. Das entspricht genau dem Fall in der Singularität, außer daß dort  $v = 0$  ist, denn unmittelbar vor dem nächsten Urknall verschwindet das Differential der Eigenzeit regelmäßig:

## Physikaufgabe 53

---

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0.$$

Wie für  $v=0$ , d.h. wenn Zeit und Eigenzeit übereinstimmen und die Relativität aufgehoben ist, gilt also auch im Falle maximaler Ausdehnung ( $v=c$ ):

$$\frac{dE^2}{c^2} - dp_x^2 - dp_y^2 - dp_z^2 = \frac{dE^2}{c^2} \Leftrightarrow dp_x^2 + dp_y^2 + dp_z^2 = 0 \Leftrightarrow dp_x^2 = dp_y^2 = dp_z^2 = 0,$$

und wie der gewöhnliche vierdimensionale Raum fordert auch der reziproke Raum

$$(dp_x = dp_y = dp_z = 0) \wedge (dp = cdE = 0) \Leftrightarrow (p_x = p_y = p_z = \text{const}) \wedge (p = cE).$$

Mithin ist es also rein mit Hilfe der Speziellen Relativitätstheorie und der Quantenmechanik gelungen zu zeigen, daß das Weltall keine Ursache hat, aber auch nicht einfach aus dem Nichts entstanden ist, da man Energie ohne Kausalität nicht aus dem Nichts erzeugen kann und das Vakuum auch nicht als Nichts verstanden werden darf. Vielmehr ist das Weltall zeitlich und räumlich begrenzt und wiederholt sich periodisch, da es ohne Kausalität auch kein Ende geben kann. Was wir als Kausalität und zeitlichen Ablauf begreifen, ist nichts anders als eine kontinuierliche Umwandlung von Entropie, die in der Raumzeit abnimmt und im reziproken Raum zu, so daß das nächste Weltall jeweils aus dem reziproken Raum hervorgeht, während das reale darin verschwindet.