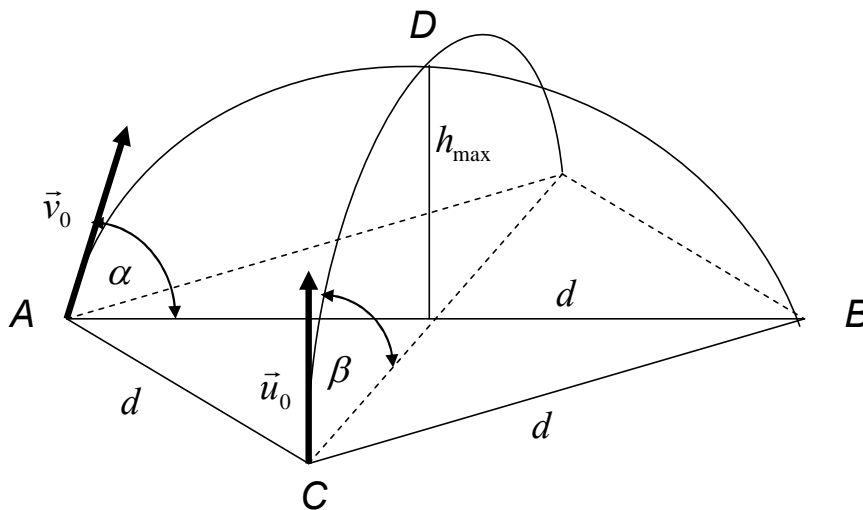


**Aufgabe:** Drei Personen stehen in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks von 20 m Seitenlänge, zwei davon sind Männer, die dritte eine Frau. Die beiden Männer sind der Ehemann der Frau und der andere ihr Liebhaber. Der gehörnte Ehemann ergreift einen Stein und wirft ihn nach der Frau. Der Liebhaber, der dies beobachtet, hat keine Gelegenheit mehr, die Frau zu schützen, er ergreift deshalb ebenfalls einen Stein und wirft ihn seinerseits nach dem vom Ehemann geschleuderten Stein, in der Hoffnung, daß sich die beiden im Fluge im jeweils höchsten Punkt ihrer Bahnkurve treffen. Beschreiben Sie nach dem denkbar einfachsten Modell, wie der Liebhaber seinen Stein werfen muß, damit sich die beiden nicht verfehlen.

**Lösung:**

Betrachten wir zunächst die Ausgangssituation, wie sie in Abbildung 1 dargestellt ist. Der Ehemann befinde sich im Punkt  $A$ , seine Frau im Punkt  $B$  und ihr Liebhaber im Punkt  $C$ . Deren unterschiedliche Körpergrößen und die Höhe ihrer Schwerpunkte über Grund wollen wir vernachlässigen. Ihr jeweiliger gegenseitiger Abstand sei  $d$ . Die beiden Steine werden zur selben Zeit  $t_0$  mit den Geschwindigkeiten  $v_0$  und  $u_0$  abgeworfen, die Reaktionszeit des Liebhabers und der Luftwiderstand sollen ebenfalls vernachlässigt werden. Der Liebhaber sieht lediglich noch, unter welchem Winkel und mit welcher Geschwindigkeit der Stein des Ehemanns abgeworfen wird und richtet seinen Wurf so ein, daß er das Projektil im Apogäum seiner Flugbahn (Punkt  $D$ ) trifft. Diese Situation ist in Abbildung 2 dargestellt.



**Abbildung 1. Zustand zum Anfangszeitpunkt  $t_0$**

Wir legen nun den Punkt  $A$  spiegelsymmetrisch zum Nullpunkt eines kartesischen Koordinatensystems derart, daß sich der Punkt  $B$  im Abstand  $d/2$  auf der positiven  $x$ -Achse befindet. Da die Länge der Mittelsenkrechten  $d_s$  im gleichseitigen Dreieck gleich  $\sqrt{3}d/2$  ist, hat der Punkt  $C$  in diesem Koordinatensystem die Koordinaten  $(-\sqrt{3}d/2, 0, 0)$ . Der vom Liebhaber anvisierte Schnittpunkt der beiden Wurfparabeln hat also die Koordinaten  $(0, 0, h_{\max})$ . Das Weg-Zeit-Gesetz des Werfers  $A$  lautet in Komponentenschreibweise:

$$x = -\frac{d}{2} + v_0 t \cos \alpha,$$

$$z = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2,$$

woraus sich die Bahngleichung zu

$$z(x) = (\tan \alpha) \left( x + \frac{d}{2} \right) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \left( x + \frac{d}{2} \right)^2$$

ergibt. Um die Reichweite  $d$  des Wurfes einzuhalten, müssen Winkel und Abgangsgeschwindigkeit des Steines so gewählt werden, daß

$$d = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha).$$

Ähnlich gilt, da die Bahn des Werfers  $B$  länger ist,

$$\sqrt{3}d = \frac{u_0^2}{g} \sin(2\beta).$$

Da sich die Projektile in der Höhe  $h_{\max}$  treffen sollen, gilt einerseits

$$h_{\max} = \frac{d}{2} \tan \alpha - \frac{gd^2}{8v_0^2 \cos^2 \alpha} = \frac{d}{4} \tan \alpha$$

und andererseits

$$h_{\max} = \frac{\sqrt{3}d}{4} \tan \beta.$$

Gleichsetzen der beiden Gleichungen liefert den Zusammenhang zwischen den Abgangswinkeln:

$$\tan \alpha = \sqrt{3} \tan \beta,$$

während der Quotient aus den beiden vorletzten Gleichungen das Verhältnis der Abgangsgeschwindigkeiten liefert:

$$u_0^2 = v_0^2 \frac{3 + \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}.$$

Im Falle  $\alpha = 45^\circ$ , dem Winkel größter Reichweite, ist  $\tan \alpha = 1$  und  $\beta = 30^\circ$ . Ferner ist  $v_0 = \sqrt{gd}$  und  $u_0 = \sqrt{2}v_0$ . Der Zeitpunkt, zu dem beide Steine im Apogäum zusammenstoßen, ergibt sich durch Auflösen der Bewegungsgleichungen in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung zu

$$t_1 = \frac{d}{2v_0 \cos \alpha} = \frac{\sqrt{3}d}{2u_0 \cos \beta} = \sqrt{\frac{d}{2g}}$$

Die maximale Bahnhöhe wird erreicht für  $h_{\max} = d/4$ . Dieser Fall ist in Abbildung 2 dargestellt. Bei einem Abstand  $d$  von 20 m beträgt  $h_{\max} = 5$  m. Für  $g \approx 10 \text{ m/s}^2$  wird diese Höhe nach ungefähr 1 s erreicht. Die Abgangsgeschwindigkeit des Steines des Ehegatten muß für den Abgangswinkel größter Reichweite ca. 14 m/s betragen, die Abgangsgeschwindigkeit des Steines des Liebhabers mit 19,8 m/s deutlich größer sein, da dieser seinen Stein flacher werfen muß, um den anderen zu treffen. Die Masse spielt in dem betrachteten Problem keine Rolle. Darüber hinaus gäbe es theoretisch noch andere Abgangswinkel, unter denen der geschleuderte Stein abgeschossen werden kann, dafür müßte allerdings die Forderung, daß sich die Steine genau in ihrem jeweiligen Apogäum treffen, aufgegeben werden.

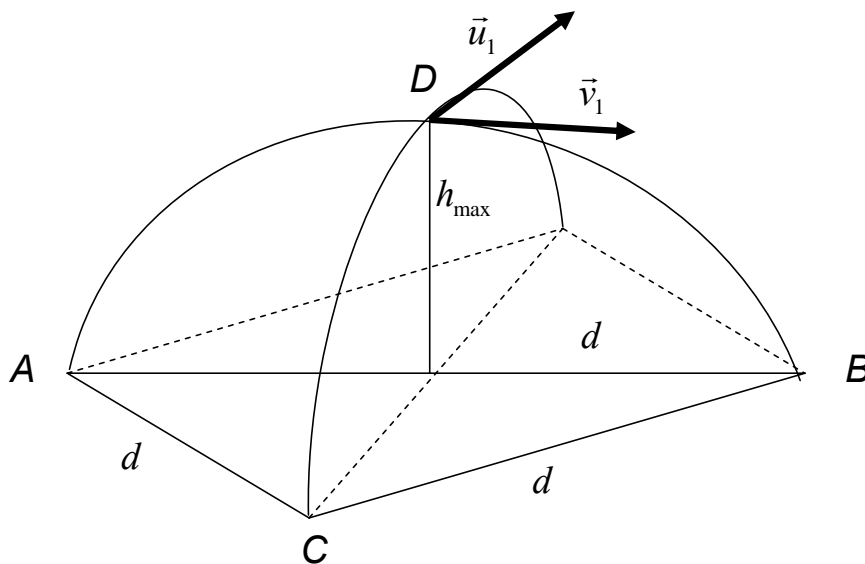


Abbildung 2. Zustand zum Trefferzeitpunkt  $t_1$