

Physikaufgabe 36

[Home](#) | [Startseite](#) | [Impressum](#) | [Kontakt](#) | [Gästebuch](#)

Aufgabe: Berechnen Sie den elektrischen Fluß eines Dipols durch eine Kugel, die beide Ladungen einschließt. Vergleichen Sie damit den Fluß um jede der Einzelladungen, indem Sie diese Flüsse zu einem Gesamtfluß addieren. Welche Schlußfolgerungen ziehen Sie daraus für die Quantenmechanik?

Lösung: In kartesischen Koordinaten lautet das Potential zweier entgegengesetzt geladener Punktladungen im Abstand a auf der x -Achse

$$\phi(x, y, z) = \frac{q}{\sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{q}{\sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + z^2}}.$$

Führen wir Kugelkoordinaten ein, wobei wir $x = r \sin \theta \cos \varphi$ und $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ setzen, erhalten wir den Ausdruck

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \frac{q}{\sqrt{r^2 - ar \sin \theta \cos \varphi + \frac{a^2}{4}}} - \frac{q}{\sqrt{r^2 + ar \sin \theta \cos \varphi + \frac{a^2}{4}}}.$$

Daraus ergibt sich das elektrische Feld als Gradient des Potentials zu

$$\vec{E} = -\nabla\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi.$$

Die partiellen Ableitungen lauten

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial r} &= -\frac{q}{2} \frac{2r - a \sin \theta \cos \varphi}{\sqrt{r^2 - ra \sin \theta \cos \varphi + \frac{a^2}{4}}^3} + \frac{q}{2} \frac{2r + a \sin \theta \cos \varphi}{\sqrt{r^2 + ra \sin \theta \cos \varphi + \frac{a^2}{4}}^3}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} &= \frac{q}{2} \frac{a \cos \theta \cos \varphi}{\sqrt{r^2 - ra \sin \theta \cos \varphi + \frac{a^2}{4}}^3} + \frac{q}{2} \frac{a \cos \theta \cos \varphi}{\sqrt{r^2 + ra \sin \theta \cos \varphi + \frac{a^2}{4}}^3}, \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} &= -\frac{q}{2} \frac{a \sin \varphi}{\sqrt{r^2 - ra \sin \theta \cos \varphi + \frac{a^2}{4}}^3} - \frac{q}{2} \frac{a \sin \varphi}{\sqrt{r^2 + ra \sin \theta \cos \varphi + \frac{a^2}{4}}^3}.\end{aligned}$$

Damit ist das E -Feld gegeben durch

Physikaufgabe 36

$$\begin{aligned} \vec{E} = & \frac{q}{2} \frac{2r - a \sin \theta \cos \varphi}{\sqrt{r^2 - ra \sin \theta \cos \varphi + \frac{a^2}{4}}} \vec{e}_r - \frac{q}{2} \frac{2r + a \sin \theta \cos \varphi}{\sqrt{r^2 + ra \sin \theta \cos \varphi + \frac{a^2}{4}}} \vec{e}_r \\ & - \frac{q}{2} \frac{a \cos \theta \cos \varphi}{\sqrt{r^2 - ra \sin \theta \cos \varphi + \frac{a^2}{4}}} \vec{e}_\theta - \frac{q}{2} \frac{a \cos \theta \cos \varphi}{\sqrt{r^2 + ra \sin \theta \cos \varphi + \frac{a^2}{4}}} \vec{e}_\theta \\ & + \frac{q}{2} \frac{a \sin \varphi}{\sqrt{r^2 - ra \sin \theta \cos \varphi + \frac{a^2}{4}}} \vec{e}_\varphi + \frac{q}{2} \frac{a \sin \varphi}{\sqrt{r^2 + ra \sin \theta \cos \varphi + \frac{a^2}{4}}} \vec{e}_\varphi. \end{aligned}$$

Da das differentielle Oberflächenelement in Kugelkoordinaten die Form

$$d\vec{A} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{e}_r,$$

hat, ist das Skalarprodukt aus Flächenelement und E -Feld gegeben durch

$$\begin{aligned} \vec{E} d\vec{A} = & q \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{a}{r} \sin \theta \cos \varphi + \frac{a^2}{4r^2}}} - q \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{\sqrt{1 + \frac{a}{r} \sin \theta \cos \varphi + \frac{a^2}{4r^2}}} \\ & - \frac{aq}{2r} \frac{\sin^2 \theta d\theta \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{a}{r} \sin \theta \cos \varphi + \frac{a^2}{4r^2}}} - \frac{aq}{2r} \frac{\sin^2 \theta d\theta \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 + \frac{a}{r} \sin \theta \cos \varphi + \frac{a^2}{4r^2}}}. \end{aligned}$$

Nach dem Gaußschen Satz berechnet sich der Fluß im Abstand r durch eine Sphäre, die den gesamten Dipol umgibt, aus dem Oberflächenintegral

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} d\vec{A} = & q \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{a}{r} \sin \theta \cos \varphi + \frac{a^2}{4r^2}}} - q \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{\sqrt{1 + \frac{a}{r} \sin \theta \cos \varphi + \frac{a^2}{4r^2}}} \\ & - \frac{qa}{2r} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta d\theta \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{a}{r} \sin \theta \cos \varphi + \frac{a^2}{4r^2}}} - \frac{qa}{2r} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta d\theta \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 + \frac{a}{r} \sin \theta \cos \varphi + \frac{a^2}{4r^2}}}. \end{aligned}$$

Den Ausdruck unter der Wurzel formen wir wie folgt um:

$$1 + \frac{a^2}{4r^2} \mp \frac{a}{r} \sin \theta \cos \varphi = \left(1 + \frac{a^2}{4r^2}\right) \left[1 \mp \left(1 + \frac{a^2}{4r^2}\right)^{-1} \frac{a \sin \theta \cos \varphi}{r}\right].$$

Substituieren wir nun noch $a_r \equiv a/(1 + a^2/4r^2)$, können wir diesen Ausdruck weiter vereinfachen:

$$1 + \frac{a^2}{4r^2} \mp \frac{a}{r} \sin \theta \cos \varphi = \frac{a}{a_r} \left(1 \mp \frac{a_r \sin \theta \cos \varphi}{r}\right)$$

Physikaufgabe 36

und in das Oberflächenintegral einsetzen:

$$\oint \vec{E} d\vec{A} = q \sqrt{\frac{a_r}{a}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{a_r}{r} \sin \theta \cos \varphi}^3} - q \sqrt{\frac{a_r}{a}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{\sqrt{1 + \frac{a_r}{r} \sin \theta \cos \varphi}^3} \\ - \frac{qa_r}{2r} \sqrt{\frac{a_r}{a}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta d\theta \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{a_r}{r} \sin \theta \cos \varphi}^3} - \frac{qa_r}{2r} \sqrt{\frac{a_r}{a}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta d\theta \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 + \frac{a_r}{r} \sin \theta \cos \varphi}^3}.$$

Mit der Substitution $\xi \equiv a_r \sin \theta \cos \varphi / r$ folgt daraus

$$\oint \vec{E} d\vec{A} = q \sqrt{\frac{a_r}{a}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \xi}^3} - \frac{1}{\sqrt{1 + \xi}^3} \right) \sin \theta d\theta d\varphi \\ - \frac{q}{2} \sqrt{\frac{a_r}{a}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi}^3} + \frac{\xi}{\sqrt{1 + \xi}^3} \right) \sin \theta d\theta d\varphi$$

Da diese Integrale analytisch nicht lösbar sind, müssen wir die Integranden in eine Potenzreihe entwickeln und gliedweise integrieren. Mit der binomischen Näherung

$$(1 \mp \xi)^{-3/2} = 1 \pm \frac{3}{2} \xi + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \xi^2 \pm \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} \xi^3 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \xi^4 \pm \dots$$

folgt für die Differenz

$$(1 - \xi)^{-3/2} - (1 + \xi)^{-3/2} = 3\xi + 3 \frac{5 \cdot 7}{4 \cdot 6} \xi^3 + 3 \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \xi^5 + \dots$$

und für die Summe

$$\xi(1 - \xi)^{-3/2} + \xi(1 + \xi)^{-3/2} = 2\xi + 2 \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \xi^3 + 2 \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \xi^5 + \dots$$

Setzen wir diese Potenzreihenentwicklungen wieder in das Flußintegral ein,

$$\oint \vec{E} d\vec{A} = 3q \sqrt{\frac{a_r}{a}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\xi + \frac{5 \cdot 7}{4 \cdot 6} \xi^3 + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \xi^5 + \dots \right) \sin \theta d\theta d\varphi \\ - q \sqrt{\frac{a_r}{a}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\xi + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \xi^3 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \xi^5 + \dots \right) \sin \theta d\theta d\varphi,$$

können wir nach Variablen getrennt integrieren:

Physikaufgabe 36

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} d\vec{A} &= 3q \sqrt{\frac{a_r}{a}} \frac{a_r}{r} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi + 3q \sqrt{\frac{a_r}{a}} \frac{5 \cdot 7}{4 \cdot 6} \frac{a_r^3}{r^3} \int_0^\pi \sin^4 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos^3 \varphi d\varphi \\ &+ 3q \sqrt{\frac{a_r}{a}} \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \frac{a_r^5}{r^5} \int_0^\pi \sin^6 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos^5 \varphi d\varphi + \dots \\ &- q \sqrt{\frac{a_r}{a}} \frac{a_r}{r} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi - q \sqrt{\frac{a_r}{a}} \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \frac{a_r^3}{r^3} \int_0^\pi \sin^4 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos^3 \varphi d\varphi \\ &- q \sqrt{\frac{a_r}{a}} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{a_r^5}{r^5} \int_0^\pi \sin^6 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos^5 \varphi d\varphi - \dots \end{aligned}$$

Allgemein gilt für das Integral über Potenzen des Kosinus die Rekursionsformel

$$\int_0^{2\pi} \cos^n \varphi d\varphi = \frac{1}{n} \left[\cos^{n-1} \varphi \sin \varphi \right]_0^{2\pi} + \frac{n-1}{n} \int_0^{2\pi} \cos^{n-2} \varphi d\varphi,$$

d.h. diese Integrale verschwinden wegen

$$\int_0^{2\pi} \cos^n \varphi d\varphi = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \dots \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \dots \frac{2}{3} \left[\sin \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right]_0^{2\pi} = 0$$

identisch und der Fluß durch die Sphäre ist null. Ein elektrischer Dipol ist also nach außen hin neutral und kann daher auch keinen elektrischen Fluß abgeben. Legt man die Sphäre um die Einzelladungen und addiert die beiden Flüsse, so ist die Summe ebenfalls gleich null,

$$\oint \vec{E} d\vec{A} = 4\pi q - 4\pi q = 0,$$

d.h. der Fluß würde nicht weiter als bis zur anderen Ladung reichen. Das erklärt, warum Atome nach außen abgeschirmt sind. Weil die Flüsse sich nach dem Satz von Gauß für beliebige Entfernungen zu null addieren, kann ein Atom, das nicht angeregt wurde, unter keinen Umständen Energie durch Strahlung verlieren. Da die Zentrifugalkraft der Anziehung exakt entgegenwirkt, können auch keine Beschleunigungen auftreten, wie das z.B. auf den Bahnen des Bohrschen Atommodells der Fall ist. Da der Schwerpunkt der Ladungsverteilung genau zwischen den beiden elektrischen Monopolen liegt (siehe Abb. 1), also nicht mit dem Massenschwerpunkt zusammenfällt, haben wir unsere Betrachtung in ein System verlegt, in dem Proton und Elektron um die gemeinsame Mitte kreisen, so daß die Summe der Kräfte auf beide Ladungen gleich null ist. Nur wenn man annimmt, daß sich sowohl das elektrische als auch das magnetische Feld nicht gegenseitig kompensieren, könnte ein gebundenes Elektron theoretisch abstrahlen. So aber sind beide Felder, sowohl das durch den Kreisstrom hervorgerufene Magnetfeld als auch das radiale elektrische Feld um den Ladungsschwerpunkt räumlich und zeitlich konstant und gegenläufig, und damit addieren sich auch die Poynting-Vektoren der beiden zu null.

Im System des rotierenden Ladungsschwerpunkts besitzt der Dipol keinen Drehimpuls und erfährt auch keine Kraftwirkung, weil sich Coulomb-Anziehung und Zentrifugalkraft paarweise aufheben. Aufgrund der Drehimpulserhaltung verhalten sich die Abstände der Ladun-

Physikaufgabe 36

gen im System des Massenschwerpunkts umgekehrt wie die Massen. Wenn also ein rotierender Dipol im System des Ladungsschwerpunkts keine Beschleunigung erfährt, dann kann er auch im System des Massenschwerpunkts nicht strahlen. Nur ein im Schwerpunkt ruhendes Proton hätte in diesem System ein verschwindendes magnetisches Moment, und das Elektron würde dann unter Verlust an kinetischer Energie in den Kern stürzen. Da die Quantenmechanik aber das magnetische Moment des Kerns bei der Bewegung um den Schwerpunkt nicht in Betracht zieht, gerät sie in Widerspruch zur klassischen Elektrodynamik. Daher mußte Niels Bohr postulieren, daß ein auf diskreten Bahnen um den Kern kreisendes Elektron nicht strahlt.

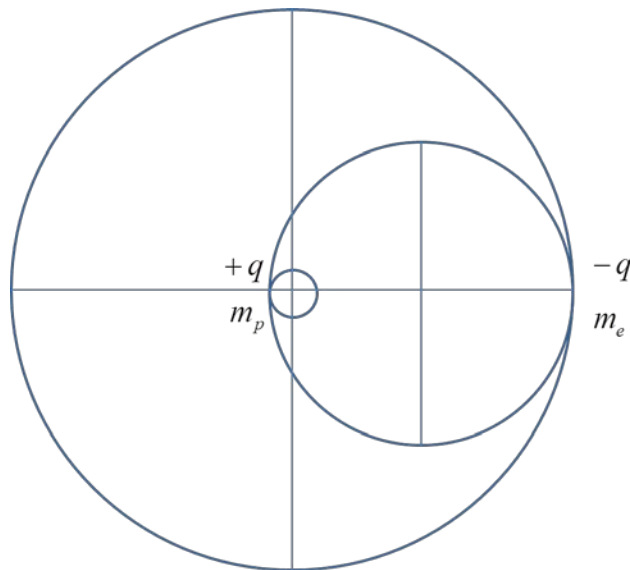


Abbildung 1. Unterschied zwischen Ladungsschwerpunkt und Massenschwerpunkt eines Wasserstoffatoms