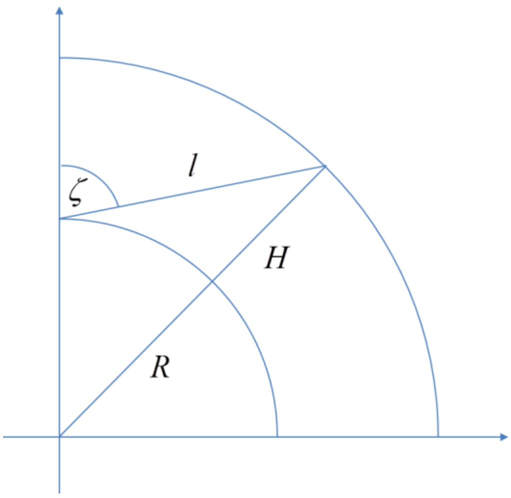
Aufgabe: Zeigen Sie, daß sich das Modell der reduzierten Weglänge von der Atmosphäre auf das Universum übertragen läßt.

Lösung: Betrachten wir das Universum aus zwei Kugelschalen bestehend, einer inneren Vollkugel mit Durchmesser D, dem einzigen zentralen Schwarzen Loch, das es geben soll und in dem sich die gesamte „dunkle“ Materie konzentriert, und einer äußeren Kugelschale vom Durchmesser H, in der sich die übrige sichtbare („helle“) Materie befindet. Sei l der Weg eines Lichtstrahls von der Oberfläche des Schwarzen Lochs zum Rande des Universums, welches wir für $T \neq 0$ als Hohlraumstrahler mit $dQ = dS = 0$ ansehen wollen. Der Winkel ζ, den eine beliebige Flächennormale des Schwarzen Lochs mit dem gekrümmten Raum einschließt, entspreche dem Zenitwinkel ζ der Atmosphäre. Ferner sei R der Radius des Schwarzen Lochs, d.h. der Ereignishorizont, und der Radius des sichtbaren Alls entspreche der Skalenhöhe H. Die beim Urknall homogen verteilte Materie nehme durch die Expansion des Alls radial nach außen ab.



Da die Masse eines nicht unendlich ausgedehnten Alls konstant bleiben muß, kann Materie im Normalfall nur vom sichtbaren in den dunklen Zustand übergehen, niemals umgekehrt.[1] Da Schwarze Löcher sich dadurch ausdehnen, daß sie sichtbare Materie verschlucken, nimmt die dunkle Materie immer weiter zu, während sich die sichtbare kontinuierlich verringert.

Da sich wegen der absoluten Gleichzeitigkeit in allen sich relativ zueinander bewegenden Koordinatensystemen die Abstände wie die Geschwindigkeiten verhalten, haben entferntere Galaxien auch größere Geschwindigkeiten. Wäre der Ereignishorizont seit Entstehung des Weltalls nicht auf R angewachsen, könnten wir selbst noch fernste Galaxien[2] optisch sehen. Außerdem wäre der nächtliche Himmel dann taghell. Da sich das Schwarze Loch immer weiter ausdehnt und dabei an Masse noch zunimmt, wird die Geschwindigkeit der fernen Galaxien allmählich abnehmen und schließlich ganz zu Null werden, zumal sich die Weglänge l des Lichts dabei immer weiter verkürzt. Der einzige erlaubte Zenitwinkel in diesem Grenzfall, unter dem

[1] Schwarze Löcher zerfallen nur dann, wenn sie nicht weitere Masse anreichern. Im übrigen ist die Zerfallszeit größer als das Alter des Universums.
[2] Die sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen

das Licht sozusagen auf einer Kreisbahn um das Schwarze Loch läuft, läge dann bei 90°. Durch den ständig wachsenden Gravitationsdruck ist die Entropie des Universums irgendwann maximal geworden und besteht dann nur noch aus Bindungsenergie des Schwarzen Lochs. Diese „unfreie“ Energie kann sich nur schlagartig durch plötzliche Zerstrahlung in freie Energie zurückverwandeln. Kurz nach dem „Urknall“ lag bekanntlich die gesamte Materie in Form von sichtbarer Materie hoher Temperatur vor, Schwarze Löcher gab es damals noch nicht.

Wir wenden nun auf den Schenkel $R+h$ für irgendeine „Höhe“ h über dem Radius des Schwarzen Lochs den Kosinussatz an, wonach gilt:

$$(R+h)^2 = l^2 + R^2 + 2lR\cos\zeta .$$

Dabei haben wir die Identität $\cos(\pi-\zeta) = -\cos\zeta$ benutzt. Diesen Ausdruck formen wir um in eine quadratische Gleichung:

$$l^2 + 2lR\cos\zeta - \left(2Rh + h^2\right) = 0,$$

deren Lösungen durch

$$l_{1,2} = -R\cos\zeta + \sqrt{R^2\cos^2\zeta + 2Rh + h^2}$$

gegeben sind. Daraus folgt für die Lösung mit dem positiven Vorzeichen das Differential

$$dl = \frac{R+h}{\sqrt{R^2\cos^2\zeta + 2Rh + h^2}}\,dh.$$

Da zwei Massen eines idealen Gases unterschiedlicher Dichte bei gleicher Querschnittsfläche des Behälters unterschiedliche Höhen einnehmen, leitet sich die reduzierte Weglänge m aus dem Verhältnis der Dichten gemäß

$$m = \frac{\rho}{\rho_0}\,l$$

her. Für das Differential der reduzierten Weglänge folgt demnach

$$dm = \frac{\rho}{\rho_0}\,dl = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{R+h}{\sqrt{R^2\cos^2\zeta + 2Rh + h^2}}\,dh$$

Unter der Annahme, daß die Dichte ausgehend von ihrem Maximalwert in Höhe des Ereignishorizonts exponentiell mit der Ausdehnung abnimmt, d.h.

$$\rho = \rho_0 e^{-h/H},$$

und in der Skalenhöhe H auf 1/e abgefallen ist, folgt für die reduzierte Weglänge in den Grenzen von Null bis Unendlich

$$m(\zeta)=\int_0^\infty e^{-h/H}\,\frac{R+h}{\sqrt{R^2\cos^2\zeta+2Rh+h^2}}\,dh.$$

Bei senkrechtem Einfall gilt

$$m(0)=\int_0^\infty e^{-h/H}dh=-H\left[e^{-h/H}\right]_0^\infty=H.$$

Für die relative Luftmasse des Universums, also das Verhältnis aus Weglänge bei Schrägsicht und senkrechtem Einfall, erhalten wir schließlich

$$m_r=\frac{m(\zeta)}{m(0)}=\frac{1}{H}\int_0^\infty e^{-h/H}\,\frac{R+h}{\sqrt{R^2\cos^2\zeta+2Rh+h^2}}\,dh.$$

Hierbei wurde über ein unendlich ausgedehntes Universum integriert, was wegen des exponentiellen Abklingens der Dichte sicher eine gute Näherung darstellt.

Nachfolgend führen wir zwei Grenzbetrachtungen durch, eine für den Fall, daß $R\to 0$ geht, was dem Urknall entspricht, und eine andere für den Fall $R\to R+H,$ welcher gleichbedeutend mit $H\to 0$ ist. Es gilt

$$\lim_{R\to 0}m_r=\frac{1}{H}\int_0^\infty e^{-h/H}\lim_{R\to 0}\frac{R+h}{\sqrt{R^2\cos^2\zeta+2Rh+h^2}}\,dh=\frac{1}{H}\int_0^\infty e^{-h/H}dh=1,$$

d.h. die relative Luftmasse des Universums ist in diesem Fall maximal und es gibt noch kein Schwarzes Loch. Im anderen Extremfall ist

$$\lim_{H\to 0}m_r=\int_0^\infty\left(\lim_{H\to 0}\frac{1}{H}e^{-h/H}\right)\frac{R+h}{\sqrt{R^2\cos^2\zeta+2Rh+h^2}}\,dh=0,$$

weil die e-Funktion stärker gegen Null geht als jede Potenz ihres Arguments, d.h. die relative Luftmasse des Universums ist komplett in dunkle Materie umgewandelt worden.

Aus dem idealen Gasgesetz und nach der Formel für den hydrostatischen Druck ist eine verschwindende Skalenhöhe mit einem Rückgang der Temperatur auf den absoluten Nullpunkt verbunden:

$$H=\frac{N_A kT}{Mg},$$

wobei *k* die Boltzmann-Konstante, *M* die Molare Masse, N_A die Avogadro-Konstante und *g* die Gravitationsbeschleunigung ist. Man kann unschwer erkennen, daß bei einem Gravitationskollaps ein starker Temperaturanstieg erfolgen muß, der die dunkle Materie restlos in sichtbare umsetzt. Das würde auch aus dem postulierten Räuber-Beute-Formalismus folgen, bei dem sichtbare Materie kontinuierlich in dunkle umgewandelt wird, wobei die Natur dieses Systems es so will, daß es nie ganz zum Erliegen kommt. Deshalb kann auch der absolute Temperaturnullpunkt niemals erreicht werden.