

## Physikaufgabe 26

---

[Home](#) | [Startseite](#) | [Impressum](#) | [Kontakt](#) | [Gästebuch](#)

**Aufgabe:** Beweisen Sie, daß das Universum kein abgeschlossenes System darstellt und periodisch eine Umwandlung vom Zustand entarteter Materie in den Gaszustand erfährt.

**Lösung:** Nach den Vorstellungen der klassischen Thermodynamik sind wir es gewohnt, gewisse Größen wie etwa die Energie als Erhaltungsgrößen anzusehen. Hingegen gilt die Entropie nicht als Erhaltungsgröße, und es wird postuliert, daß sie in allen natürlichen Systemen, die abgeschlossen sind, zunimmt.

Die Energieerhaltung ist äquivalent zur Erhaltung der Masse. Unterteilen wir die gesamte Materie des Universums in die „sichtbare“ Masse  $M_U$  und die unsichtbare Masse  $M_S$ , die sich z.B. in Schwarzen Löchern verbirgt, muß nach dem Massenerhaltungssatz gelten:

$$M = M_S + M_U = \text{const.}$$

Dabei zählt jede Masse zu einer bestimmten Zeit entweder zur sichtbaren oder zur unsichtbaren, wobei der Übergang von der einen in die andere Form fließend ist. Für die sichtbare Masse nehmen wir an, daß aufgrund der Expansion des Weltalls und der expansionsbegleitenden starken Abkühlung alle Reaktionen exergon verlaufen und das Gleichgewicht wie bei einer chemischen Reaktion auf seiten der Edukte liegt, womit die freie Enthalpie abnehmen muß:

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S < 0.$$

Es ist eine allseits bekannte Tatsache, daß sich im Innern der Galaxien zum Teil supermassereiche Schwarze Löcher befinden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir nun an, daß sich die gesamte unsichtbare Materie in einem einzigen Schwarzen Loch mit dem Radius  $R_S$  befinde. Weil nun die Entropie eines Schwarzen Lochs

$$S_S = \frac{Ak^3}{4\hbar G}$$

außer vom Radius (genauer gesagt von der Oberfläche  $A$ ) nur von Naturkonstanten abhängt, erhalten wir mit Hilfe der Substitution  $A = 4\pi R_S^2$  – wenn wir das Schwarze Loch ohne Beschränkung der Allgemeinheit als kugelförmig annehmen – für die Entropie den Ausdruck

$$S_S = \frac{\pi k^3}{\hbar G} R_S^2,$$

wobei  $G$  die Gravitationskonstante,  $c$  die Vakuumlichtgeschwindigkeit,  $k$  die Boltzmannkonstante und  $\hbar = h/2\pi$  das reduzierte Plancksche Wirkungsquantum ist. Nun wissen wir, daß die Temperatur eines Schwarzen Lochs umgekehrt proportional zu dessen Masse ist, d.h.

$$T_S = \frac{\hbar c^3}{8\pi k G M_S}.$$

Wählen wir das Volumen als kugelförmig, d.h.

## Physikaufgabe 26

---

$$M_S = \frac{4\pi}{3} \rho R_S^3,$$

wobei  $\rho$  die Dichte ist, so ergibt sich für die Temperatur eines Schwarzen Lochs der Ausdruck

$$T_S = \frac{3\hbar c^3}{32\pi^2 k G \rho R_S^3}.$$

Sein Radius ist damit umgekehrt proportional zur dritten Wurzel aus Dichte und Temperatur und hängt sonst nur von Naturkonstanten ab:

$$R_S = \sqrt[3]{\frac{3\hbar c^3}{32\pi^2 k G} \frac{1}{\sqrt[3]{\rho T_S}}}.$$

Nehmen wir die Dichte in erster Näherung als konstant an, so folgt die Entropie einer  $1/T_S^{2/3}$ -Abhängigkeit:

$$S_S = \frac{\pi k c^3}{\hbar G} R_S^2 = \frac{1}{8} \sqrt[3]{\frac{9k}{2\pi\hbar G^5}} \frac{c^5}{\rho^{2/3} T_S^{2/3}},$$

d.h. die Entropie steigt mit sinkender Temperatur sehr stark an, während sie für gewöhnliche Materie mit sinkender Temperatur abnimmt.

Wenn wir ferner annehmen, daß die Masse  $M_U$  des Universums am Ende komplett in Schwarzen Löchern verschwindet, so würde nach dem Massenerhaltungssatz die dort gebundene Masse  $M_S$  sich der Gesamtmasse  $M$  annähern. Gleichzeitig würde die Entropie des Universums  $S_U$  wegen der sinkenden Temperaturen gegen Null gehen, während die Temperatur der immer massereicher werdenden Schwarzen Löcher ebenfalls gegen Null geht. Lediglich die Entropie der Schwarzen Löcher würde dann mit sinkender Temperatur dem Wert der Gesamtenergie des Universums entgegenstreben, mithin maximal werden, womit der Energieerhaltung Genüge getan ist:

$$S_S + S_U = E = \text{const.}$$

Weil Schwarze Löcher aufgrund der Hawking-Strahlung zerfallen (allerdings in einer Zeit, die größer ist als das Alter des Universums), kehrt sich der geschilderte Prozeß irgendwann um, sofern nicht ein schlagartiger Kollaps der extrem entarteten Materie einsetzt, der das Universum in einer Art Phasenübergang urplötzlich in den Gaszustand zurückverwandelt und ihm erneut maximale Entropie verleiht, wie das beim Urknall der Fall war,

qed

Anmerkung: Es versteht sich, daß zum Zeitpunkt des Urknalls noch keine Schwarzen Löcher existierten. Ein System wie das beschriebene nennen wir ein periodisches Räuber-Beute-System.