

# Physikaufgabe 21

---

[Home](#) | [Startseite](#) | [Impressum](#) | [Kontakt](#) | [Gästebuch](#)

**Aufgabe:** Beweisen Sie, daß die Heisenbergsche Unschärferelation in der statistischen Formulierung  $\sigma_x \sigma_p \geq \hbar/2$ , wobei  $\sigma_x$  und  $\sigma_p$  positive Größen sind, falsch ist.

**Beweis:** Übertragen wir die quantenmechanische Aufgabenstellung gedanklich auf ein Sonnensystem mit zwei Planeten, dessen beide Brennpunkte zusammenfallen, dann verhalten sich in einem derart entarteten System die Quadrate der Umlaufzeiten der beiden Planeten nach dem Dritten Keplerschen Gesetz wie die Kuben ihrer Bahnradien, d.h.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}.$$

In bezug auf den gemeinsamen Brennpunkt sind die Drehimpulse der beiden Planeten mit den Massen  $m_1$  und  $m_2$  gegeben durch

$$L_1 = m_1 r_1 v_1 \quad \text{und} \quad L_2 = m_2 r_2 v_2.$$

Wir richten es nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit so ein, daß die Umlaufbahn des äußeren Planeten genau dem doppelten Abstand des inneren entspricht, d.h.  $r_2 = 2r_1$ , und daß beide Planeten gleiche Masse  $m$  haben. Da für die Umlaufzeit  $T$  auf einer Kreisbahn die Relation  $T = 2\pi/v$  gilt, folgt für die Geschwindigkeit des äußeren Planeten mit Hilfe des Keplerschen Gesetzes die Gleichung  $v_2 = v_1 \sqrt{r_1/r_2}$ . Unter den genannten Bedingungen gilt für die Drehimpulse also

$$L_1 = m r_1 v_1 \quad \text{bzw.} \quad L_2 = \sqrt{2} m r_1 v_1.$$

Eine mit einem masselosen Asteroiden erfolgte Energieübertragung<sup>1</sup> durch einen unelastischen Stoß möge nun dazu führen, daß der innere Planet kurzfristig auf die Bahn des äußeren angehoben wird. Ein solcher Übergang wäre dann mit einer Drehimpulsänderung

$$\Delta L = L_2 - L_1 = (\sqrt{2} - 1) m r_1 v_1$$

verbunden. Definieren wir den Übergang des inneren Planeten auf die Bahn des äußeren im quantenmechanischen Sinne als Orts- und Impulsunschärfe

$$\Delta r \equiv r_2 - r_1 = r_1 \quad \text{bzw.} \quad \Delta v \equiv v_2 - v_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right) v_1,$$

so folgt daraus die Heisenbergsche Unschärferelation in der Form

$$\Delta r \Delta p = -\frac{\Delta L}{\sqrt{2}} = -\left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) L_1 < 0.$$

---

<sup>1</sup> in Analogie zur Photon-Elektron-Wechselwirkung

## Physikaufgabe 21

---

Setzen wir  $r = x$ , so ist  $\Delta x \Delta p < 0$  im Widerspruch zu

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Also ist die Heisenbergsche Unschärferelation in der Formulierung  $\sigma_x \sigma_p \geq \hbar/2$  falsch, qed. Richtig ist vielmehr die Relation

$$-\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2},$$

wobei entweder  $\Delta x$  oder  $\Delta p$  negativ ist, je nachdem, welches Vorzeichen die andere Größe hat. Die Größen  $\sigma_x$  und  $\sigma_p$  sind hingegen nichts anderes zwei willkürlich miteinander multiplizierte Momente zweiter Ordnung, die physikalisch nichts miteinander zu tun haben. Eigentlich gibt Heisenberg in seiner ursprünglichen Formulierung auch nichts anderes wieder als die Erhaltung des Drehimpulserhaltungssatzes, weil das Produkt aus Ort und Impuls nun einmal die Dimension eines Drehimpulses und damit einer Wirkung hat. Für das beschriebene Gedankenexperiment bleibt der Drehimpuls erhalten. Gleiches muß auch in der Quantenmechanik gelten:

$$\Delta x(-\Delta p) = (-\Delta x)\Delta p.$$

Der Einfachheit halber wählen wir nun in der Heisenbergschen Unschärferelation das Gleichheitszeichen, so daß für Summe und Differenz der Übergänge von Bahn 1 nach Bahn 2 und zurück gilt:

$$\Delta x_{12} \Delta p_{12} + \Delta x_{21} \Delta p_{21} = \hbar \quad \text{und} \quad \Delta x_{12} \Delta p_{12} - \Delta x_{21} \Delta p_{21} = 0.$$

Setzen wir nun wegen des Impulserhaltungssatzes  $\Delta p_{12} = -\Delta p_{21}$  und wegen der Drehimpulserhaltung  $\Delta x_{21} = -\Delta x_{12}$  so folgt aus der Differenz

$$\Delta x_{12}(-\Delta p_{21}) = (-\Delta x_{12})\Delta p_{21}.$$

Dieser Ausdruck ist äquivalent zur Summe

$$\Delta x_{12}(-\Delta p_{21}) = \hbar - (-\Delta x_{12})\Delta p_{21}.$$

Mit  $\Delta x_{12} = \Delta x$  und  $\Delta p_{21} = \Delta p$ , folgt die völlige Symmetrie von Anregung und Zerfall. Damit wird nun die Unschärferelation völlig ausgehebelt, weil sie keinerlei Aussagen zu den Erhaltungssätzen macht. Stattdessen hätte sie sich nahtlos in die Energie-, Impuls- und Drehimpulserhaltung einzufügen, ferner sollte sie dem Dritten Newtonschen Gesetz in Verbindung mit dem Ersten genügen. Es bleibt also dem auf die äußere Bahn angehobenen Planeten, ähnlich dem Übergang eines Elektron zwischen zwei Schalen durch Absorption eines Photons, nichts anderes übrig, als gemäß *actio = reactio* wieder auf die innere Bahn zurückzuspringen, weil wie in der klassischen Mechanik gelten muß, daß die Summe aller Kräfte gleich null ist. Daher kann die von Heisenberg entdeckte Gesetzmäßigkeit bestenfalls einen Teilaspekt, nämlich den

## Physikaufgabe 21

---

der *actio* erklären, nicht aber die *reactio*, welche bei ihm überhaupt nicht vorkommt und damit im krassen Widerspruch zur Newtonschen Mechanik steht. Die Gesetze der Physik sind jedoch universell, d.h. sie müssen auch in der Quantenmechanik gelten.