Physikaufgabe 188

Home | Startseite | Impressum | Kontakt | Gästebuch

Aufgabe: Zeigen Sie, daß das Universum eine Überlagerung zweier quantenmechanischer harmonischer Oszillatoren aus Materie und Antimaterie ist, und daß es Katzenzustände aufweist und superdeterministisch ist.

Lösung: Auch wenn Universum und Antiuniversum zur Zeit $t=0$ einen gemeinsamen Ursprung haben, steht zum Zeitpunkt der Trennung von Materie und Antimaterie noch nicht fest, welches Elementarteilchen einmal welches Ladungsvorzeichen haben wird. Dieses wird erst bei der Beobachtung festgelegt. Es ist aber bereits mit der Erzeugung der Substanz klar, daß Materie und Antimaterie korreliert sind. Dieser scheinbare Widerspruch läßt sich durch eine gemeinsame Wellenfunktion für Universum und Antiuniversum beschreiben. Die quantenmechanische Verschränkung führt dazu, daß die Messung an einem Materieteilchen das Meßergebnis an einem Antimaterieteilchen bestimmt, selbst wenn dieses sehr weit entfernt ist. Wenn wir also ein Materieteilchen beobachten, ist damit automatisch klar, daß es zu diesem Teilchen irgendwo im Raum ein Pendant geben muß, da die Korrelation von Anfang an gegeben war. Eine gespiegelte Welt muß also existieren. Zudem können sich Materie und Antimaterie aufgrund der CPT-Transformation gegenseitig nicht beeinflussen und sind daher von Dekohärenz nicht betroffen.

In Aufgabe [187] haben wir gezeigt, daß der Lebenszyklus des Weltalls als Massenaustausch zweier zwischen den Schwarzschildradien von Punkt- und Randsingularität hin und her oszillierender Wellen aus Materie und Antimaterie gedeutet werden kann. Ersetzen wir die einfache Form eines Lichtkegels durch eine halbseitige Gaußsche Wellenfunktion der Form

$$\left.\begin{matrix}\psi_1(x)\\ \psi_2(x)\end{matrix}\right\} = \begin{cases} e^{-\gamma\frac{x^2}{R_S^2}} & \text{falls} \quad x\in[0,R_S], \\ e^{-\gamma\frac{(x-R_S)^2}{R_S^2}} & \text{falls} \quad x\in[0,R_S], \end{cases}$$

wobei $\psi_1(R_S)=\psi_2(0)=e^{-\gamma}$, dann ist das Verhalten außerhalb des Intervalls $[0,R_S]$ spiegelsymmetrisch zur Symmetrieachse. Somit ist die Überlagerung der beiden Funktionen im Intervall $x\in[0,R_S]$ gegeben durch:

$$\psi(x)=\psi_1(x)+\psi_2(x)=e^{-\gamma\frac{x^2}{R_S^2}}+e^{-\gamma\frac{(x-R_S)^2}{R_S^2}},$$

mit der Normierungsbedingung

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x)|^2dx=1.$$

Man beachte, daß die Wellenfunktion an den Intervallgrenzen nicht auf Null abgeklungen ist, sondern sich außerhalb des Universums fortsetzt. Das stellt die Aussage, daß das All aus einer Singularität hervorgegangen ist, in Frage. Wir haben die Abklingkonstante γ so gewählt, daß für die Grundschwingung an der Stelle $x=R_S$ gilt:

$$\psi_1(R_S)=\psi_2(0)=e^{-\gamma\frac{R_S^2}{R_S^2}}=e^{-\frac{1}{2}}\approx 0{,}6 \quad\Leftrightarrow\quad \gamma=\frac{1}{2}.$$

Da die beiden Wellenberge den Abstand $a=R_S$ haben, lautet die Wellenfunktion des Universums einschließlich seines komplementären Antiuniversums

$$\psi(x)=A\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{R_S^2}\right)+\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-R_S)^2}{R_S^2}\right)\right],$$

wobei A eine Normierungskonstante ist. Bezüglich der Normierung spielt es keine Rolle, wohin wir diese verschieben, daher ist der folgende Ausdruck

$$\psi(x)=A\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x+R_S/2)^2}{R_S^2}\right)+\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-R_S/2)^2}{R_S^2}\right)\right]$$

mit dem obigen konform. Die quadratische Wellenfunktion des Universums aus zwei sich überlagernden Materiewellen

$$|\psi(x)|^2=A^2\left[\exp\left(-\frac{(x+R_S/2)^2}{R_S^2}\right)+\exp\left(-\frac{(x-R_S/2)^2}{R_S^2}\right)\right.$$
$$\left.+2\exp\left(-\frac{x^2}{R_S^2}-\frac{1}{4}\right)\right]$$

muß integriert über den gesamten Raum den Wert 1 ergeben,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x)|^2dx=A^2\int_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{-\frac{(x+R_S/2)^2}{R_S^2}}+e^{-\frac{(x-R_S/2)^2}{R_S^2}}+2\exp\left(-\frac{1}{4}\right)e^{-\frac{x^2}{R_S^2}}\right]dx$$
$$=2A^2\left(1+e^{-\frac{1}{4}}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{R_S^2}}dx\approx\frac{18}{5}A^2\sqrt{\pi R_S^2}=1,$$

woraus nach Auflösung die Normierungskonstante

$$A=\sqrt{\frac{5}{18}}\frac{1}{(\pi R_S^2)^{\frac{1}{4}}}$$

folgt. Damit lautet die normierte Wellenfunktion des Universums wie folgt:

$$\psi(x)=\sqrt{\frac{5}{18}}\frac{1}{(\pi R_S^2)^{\frac{1}{4}}}\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{R_S^2}\right)+\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-R_S)^2}{R_S^2}\right)\right].$$

An den Intervallgrenzen, die durch den Schwarzschildradius festgelegt sind, gelten folgende Werte:

$$\psi(0)=\psi(R_S)=\sqrt{\frac{5}{18}}\left(\frac{1}{\pi R_S^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left[1+\exp\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\approx\sqrt{\frac{9}{10}}\left(\frac{1}{\pi R_S^2}\right)^{\frac{1}{4}}\approx\left(\frac{1}{\pi R_S^2}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Dies entspricht dem Grundzustand des harmonischen Oszillators

$$\psi_0(x)=\left(\frac{1}{\pi R_S^2}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{2^0 0!}}H_0\left(\frac{x}{R_S}\right)e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{R_S^2}}=\left(\frac{1}{\pi R_S^2}\right)^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{R_S^2}}$$

für $x=0$:

$$\psi_0(0)=\left(\frac{1}{\pi R_S^2}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Wir können also das Weltall quantenmechanisch als Überlagerung aus zwei kohärenten Zuständen zweier harmonischer Oszillatoren ansehen. Ein quantenmechanischer Oszillator läßt sich als Überlagerung seiner Eigenzustände beschreiben:

$$\psi_n(x)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}.$$

Mit dem Schwarzschildradius als natürlicher Längeneinheit des Oszillators lautet die charakteristische Längenkonstante

$$R_S=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}=cT_S.$$

Damit vereinfacht sich die Formel wie folgt:

$$\psi_n(x)=\left(\frac{1}{\pi R_S^2}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}H_n\left(\frac{x}{R_S}\right)e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{R_S^2}}.$$

Der Grundzustand hat die Form einer Gaußkurve,

$$\psi_0(x)=\left(\frac{1}{\pi R_S^2}\right)^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{R_S^2}}.$$

Diese läßt sich mittels der Substitution $y=x/R_S$ und dem Absteigeoperator

$$\hat{a}=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x}+\frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{R_S}+R_S\frac{i}{\hbar}\hat{p}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{R_S}+R_S\frac{\partial}{\partial x}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(y+\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

aus der Gleichung $\hat{a}\left|\psi_0\right\rangle=0$ bestimmen:

$$\left(y+\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_0(y)=0.$$

Die Lösung lautet

$$\psi_0(y) = Ae^{-\frac{1}{2}y^2}.$$

Die Wellenfunktionen der angeregten Zustände ψ_n ergeben sich durch *n*-fache Anwendung des Aufsteige-Operators $\hat{a}^\dagger$ auf den Grundzustand $\psi_0(y)$. Lösen wir die Operatorgleichung $\hat{a}^\dagger|\psi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\psi_{n+1}\rangle$ nach dem höheren Eigenvektor auf, erhalten wir eine absteigende Folge von Wellenfunktionen:

$$|\psi_{n+1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\hat{a}^\dagger|\psi_n\rangle, \qquad |\psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}\hat{a}^\dagger|\psi_{n-1}\rangle,$$
$$|\psi_{n-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n-1}}\hat{a}^\dagger|\psi_{n-2}\rangle, \quad |\psi_{n-2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n-2}}\hat{a}^\dagger|\psi_{n-3}\rangle$$

usw., die wir nur noch zu iterieren brauchen:

$$|\psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}\hat{a}^\dagger|\psi_{n-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}\left(\hat{a}^\dagger\right)^2|\psi_{n-2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)(n-2)}}\left(\hat{a}^\dagger\right)^3|\psi_{n-3}\rangle = \ldots$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(n-1))}}\left(\hat{a}^\dagger\right)^n|\psi_{n-n}\rangle,$$

bis sich das endgültige Ergebnis

$$|\psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\hat{a}^\dagger\right)^n|\psi_0\rangle$$

ergibt. Wenden wir den Aufsteige-Operator

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{R_S} - R_S\frac{i}{\hbar}\hat{p}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{R_S} - R_S\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(y - \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

n-mal auf den Grundzustand $|\psi_0\rangle$ an, erhalten wir den angeregten Zustand $|\psi_n\rangle$, den wir mittels der Substitution

$$H_n(y) = e^{\frac{1}{2}y^2}\left(y - \frac{\partial}{\partial y}\right)^n e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

auch in Hermiteschen Polynomen ausdrücken können:

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\hat{a}^\dagger\right)^n\psi_0(x) = \left(\frac{1}{\pi R_S^2}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\hat{a}^\dagger\right)^n e^{-\frac{1}{2}y^2} = \left(\frac{1}{\pi R_S^2}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{n!}}\frac{1}{\sqrt{2^n}}\left(y - \frac{\partial}{\partial y}\right)^n e^{-\frac{1}{2}y^2}$$
$$= \left(\frac{1}{\pi R_S^2}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{n!2^n}}e^{-\frac{1}{2}y^2}e^{\frac{1}{2}y^2}\left(y - \frac{\partial}{\partial y}\right)^n e^{-\frac{1}{2}y^2} = \left(\frac{1}{\pi R_S^2}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{n!2^n}}e^{-\frac{1}{2}y^2}H_n(y).$$

Entwickeln wir die Wellenfunktion

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x)$$

nach ihren Eigenfunktionen, erhalten wir die Entwicklungskoeffizienten gemäß

$$c_n = \langle \psi_n | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}_n(x) \psi(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{n!}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\left(\hat{a}^\dagger\right)^n \psi_0(x)} \psi(x)\, dx.$$

Da $\hat{a}^\dagger$ zu $\hat{a}$ adjungiert ist, gilt für beliebige Wellenfunktionen $\psi(x)$ die Identität

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\left(\hat{a}^\dagger\right)^n \psi_0(x)} \psi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}_0(x)\, \hat{a}^n \psi(x)\, dx,$$

d.h.

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}_0(x)\, \hat{a}^n \psi(x)\, dx.$$

Mit den Eigenzuständen α des Vernichtungsoperators, $\hat{a}\psi(x) = \alpha\psi(x)$, ergibt sich

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}_0(x) \psi(x)\, dx \equiv \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C$$

bzw.

$$\psi(x) = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \psi_n(x).$$

Bilden wir davon das Betragsquadrat,

$$\bar{\psi}(x)\psi(x) = C^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \bar{\psi}_m(x) \psi_n(x),$$

und integrieren über x, erhalten wir den elementaren Ausdruck

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(x)\psi(x)\, dx = C^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{\alpha}^m}{\sqrt{m!}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}_m(x) \psi_n(x)\, dx$$

$$= C^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{\alpha}^m}{\sqrt{m!}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \delta_{mn} = C^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = C^2 e^{|\alpha|^2},$$

den wir zur Bestimmung von C auf eins normieren müssen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(x)\psi(x)\, dx = C^2 e^{|\alpha|^2} = 1.$$

Es folgt

$$C^2 = e^{-|\alpha|^2} \quad \text{bzw.} \quad C = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2},$$

womit sich die normierte Wellenfunktion des harmonischen Oszillators ergibt:

$$\psi(x) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \psi_n(x).$$

Die kohärenten Zustände

$$\psi(x,t) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \psi_n(x) e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$$

erhalten wir durch Zeitentwicklung der stationären Zustände $\psi_n(x)$ aus den Energieeigenzuständen des harmonischen Oszillators

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Das Ergebnis lautet

$$\psi(x,t) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\alpha e^{-i\omega t}\right)^n}{\sqrt{n!}} \psi_n(x) e^{-\frac{1}{2}i\omega t}$$

und ist Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung. Setzen wir $\alpha(t) = \alpha e^{-i\omega t}$, ergibt sich

$$\psi(x,t) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(t)^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega t/2} \psi_n(x) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega t/2} e^{-in\omega t} \psi_n(x).$$

Mit $\psi(x,t) \equiv \alpha(t)$ und

$$n(t) \equiv e^{-i\omega t/2} e^{-in\omega t} \psi_n(x) = e^{-i\omega t/2} e^{-in\omega t} n(0)$$

folgt

$$|\alpha(t)\rangle \equiv e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n(t)\rangle,$$

und an der Stelle $t = 0$ erhalten wir schließlich mit $\alpha = \alpha(0)$ und $n = n(0)$ die Eigenzustände des quantenmechanischen harmonischen Oszillators, die man üblicherweise mit

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

bezeichnet. Eine in entgegengesetzter Richtung laufende Welle wie das Antiuniversum hat die Phase π. Mit

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

und

$$\left|-\alpha\right\rangle = e^{-\frac{1}{2}\left|-\alpha\right|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\alpha\right)^n}{\sqrt{n!}} \left|n\right\rangle$$

ergibt die Überlagerung aus Universum und Antiuniversum einen makroskopischen Katzenzustand,

$$\left|\alpha\right\rangle + \left|-\alpha\right\rangle = e^{-\frac{1}{2}\left|\alpha\right|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n + \left(-\alpha\right)^n}{\sqrt{n!}} \left|n\right\rangle = 2e^{-\frac{1}{2}\left|\alpha\right|^2} \left(\frac{\alpha^0}{\sqrt{0!}} \left|0\right\rangle + \frac{\alpha^2}{\sqrt{2!}} \left|n\right\rangle + \frac{\alpha^4}{\sqrt{4!}} \left|4\right\rangle + \ldots \right),$$

der nur gerade Fock-Terme enthält. Die Überlagerung von Universum und Antiuniversum stellt somit ebenfalls einen möglichen Zustand des Universums dar. Da wir jedoch anhand der Kausalität sicher unterscheiden können, in welchem Universum wir uns gerade befinden, nämlich in einem materiellen Universum wachsender Ausdehnung, muß das gespiegelte Universum ganz aus Antimaterie bestehen und zur selben Zeit schrumpfen. Das folgt daraus, daß sich unser Universum ausdehnt und die Entropie in ihm zunimmt. Abgesehen vom Zeitpunkt des Urknalls sind Universum und Antiuniversum jeweils abgeschlossene Systeme gemeinsamen Ursprungs. Das legt die Vermutung nahe, daß wir in einem superdeterministischen Universum leben, in dem die Willensfreiheit seit dem Urknall eingeschränkt ist. Jegliche Korrelationen, die zu Beginn des Universums erzeugt wurden, können nachträglich nicht mehr geändert werden, insbesondere nicht willkürlich. Der Experimentator mißt also in der Gegenwart genau das, was er aufgrund der Wechselwirkungen in der Vergangenheit messen muß. Sobald die Würfel beim ersten Experimentator gefallen sind, steht das Ergebnis des zweiten Experimentators ebenfalls fest, immer vorausgesetzt, daß dieser sich im Antiuniversum befindet und es sich um denselben Beobachter handelt. Wenn das Spiegeluniversum dem Zufall überlassen wäre, hätte das aufgrund der Korrelationen sofort auch zufällige Auswirkungen auf das Original. Damit wäre es niemals möglich, dasselbe Universum erneut hervorzubringen. Es ist also egal, wie weit zwei Beobachter räumlich und zeitlich auseinanderliegen, da der Kuchen bereits während des Urknalls halbiert wurde und der eine nur die rechte Hälfte in der Hand halten kann, wenn der andere die linke bekommen hat, und umgekehrt. Wenn also der Superdeterminismus zwischen den beiden Universen herrscht, dann kann es nicht sein, daß innerhalb jedes Teiluniversums andere Zustände herrschen und dort der freie Wille existiert. Die Natur läßt sich von uns nicht vorschreiben, wie sie zu handeln hat.[1]

[1] Überhaupt findet die Willensbildung nicht auf molekularer Ebene statt, sondern auf neuronaler. Jeder, der glaubt, sein Wille würde im Atom entschieden, liegt um Größenordnungen daneben.

