

# Physikaufgabe 18

---

[Home](#) | [Startseite](#) | [Impressum](#) | [Kontakt](#) | [Gästebuch](#)

**Aufgabe:** Beweisen Sie, daß der radioaktive Zerfall deterministisch verläuft.

**Lösung:** Angenommen, nach einem radioaktiven Zerfall seien nur noch zwei Isotope übriggeblieben. Dann kann die Zeit, nach der nur noch ein Isotop übrig ist, beliebig genau vorhergesagt werden. Verwenden wir nämlich die Gleichung für den radioaktiven Zerfall,

$$N(t) = N_0 e^{-\ln 2 \frac{t}{T_{1/2}}},$$

und setzen darin  $N_0 = 2$ , wobei  $T_{1/2}$  die Halbwertszeit ist, so folgt  $N(T_{1/2}) = 1$  mit beliebiger Genauigkeit. Wenn also die Aussage für  $n = 1$  gilt und es uns gelingt, sie unter der Annahme, daß sie auch für beliebiges  $n$  gelte, im Schluß von  $n$  auf  $n + 1$  zu beweisen, dann haben wir mittels vollständiger Induktion gezeigt, daß der Zeitpunkt des radioaktiven Zerfalls allgemein beliebig genau berechnet werden kann. Dazu bilden wir zunächst iterativ die ersten drei Glieder der Folge:

$$\begin{aligned} N(T_{1/2}) &= N_0 e^{-\ln 2} = \frac{1}{2} N_0, \\ N(2T_{1/2}) &= N_0 e^{-2\ln 2} = \frac{1}{2^2} N_0, \\ N(3T_{1/2}) &= N_0 e^{-3\ln 2} = \frac{1}{2^3} N_0 \end{aligned}$$

etc., um daraus dann die allgemeine Gesetzmäßigkeit

$$N(nT_{1/2}) = N_0 e^{-n\ln 2} = \frac{1}{2^n} N_0$$

herzuleiten. Nach Kürzung des Anfangswertes  $N_0$  können wir unter der Annahme, daß die Gesetzmäßigkeit für  $n$  gilt,

$$e^{-n\ln 2} = \frac{1}{2^n},$$

wie folgt zeigen, daß sie auch für  $n + 1$  gelten muß:

$$e^{-(n+1)\ln 2} = e^{-n\ln 2} e^{-\ln 2} = \frac{1}{2^n} \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder

$$N((n+1)T_{1/2})/N(nT_{1/2}) = \frac{1}{2}$$

ist demnach konstant, womit der radioaktive Zerfall eine geometrische Folge darstellt. Für die Glieder einer geometrischen Folge gilt nämlich

## Physikaufgabe 18

---

$$N(nT_{1/2}) = N(T_{1/2}) \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$$

und für die Summe aller Glieder einer endlichen geometrischen Reihe

$$\sum_{n=1}^m N(nT_{1/2}) = \sum_{n=1}^m N(T_{1/2}) \frac{1}{2^{n-1}} = 2N(T_{1/2}) \left(1 - \frac{1}{2^m}\right) = N_0 \left(1 - \frac{1}{2^m}\right).$$

Entsprechend ist der Grenzwert der unendlichen geometrischen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} N(nT_{1/2}) = N_0,$$

so daß sich nach Einsetzen der Exponentialfunktion folgender Ausdruck ergibt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n \ln 2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Wegen

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

können wir auch schreiben:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda n T_{1/2}} = 1,$$

was mit der Definition  $\lambda T_{1/2} \equiv \Delta\omega \Delta t$ , wobei  $\Delta\omega = \lambda N_0 / 2$ , in die Darstellung

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n \Delta\omega \Delta t} = 1$$

überführt werden kann. Die konvergente Summe aller radioaktiven Zerfälle ist demnach dem Ensemblewert zu Beginn der Messung gleichzusetzen. Wegen  $2 \ln 2 \cong 1,386 \geq 1$  folgt aus dieser Definition die Heisenbergsche Frequenz-Zeit-Unschärferelation

$$\Delta t = \frac{\ln 2}{\Delta\omega} \geq \frac{1}{2\Delta\omega}.$$

Der Zeitpunkt eines radioaktiven Zerfalls läßt sich also beliebig genau vorhersagen, wenn man den Entstehungszeitpunkt des Isotops genau kennt und die Energie- bzw. Frequenzunschärfe  $\Delta\omega$  ausreichend groß wählt:

$$\lim_{\Delta\omega \rightarrow \infty} \Delta t = \lim_{\Delta\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\Delta\omega} = 0,$$

qed

## Physikaufgabe 18

---

**Erläuterung:** Jedes Teilchen beim radioaktiven Zerfall hat offenbar die gleiche Lebensdauer, so daß die ältesten Teilchen eines Ensembles bereits zu zerfallen beginnen, wenn die jüngsten gerade entstanden sind. Denn warum sollten gleichartige Isotope unterschiedlich lange leben? Wir brauchen nur das Gesetz des radioaktiven Zerfalls entsprechend erweitern:

$$N(t) = \begin{cases} N_0 e^{-\lambda t} & \text{falls } t \in [0, nT_{1/2}] \\ N_0 (1 - e^{-\lambda(t+nT_{1/2})}) & \text{falls } t \in [-nT_{1/2}, 0] \end{cases}$$

womit sich für  $t > 0$  zeigen läßt, daß nur genau so viele Teilchen wieder zerfallen können, wie vorher entstanden sind, weil deren Summe konstant ist:

$$N(t) + N(t - nT_{1/2}) = N_0.$$

Damit kann der radioaktive Zerfall kausal mit der Entstehung dieser Teilchen zu einer Zeit  $t < 0$  in Verbindung gebracht werden, was auch die gleiche Lebensdauer aller Isotope erklären würde. Die radioaktiven Teilchen müssen dazu genau dem gleichen exponentiellen Wachstumsgesetz folgend entstanden sein, wie sie wieder zerfallen, was aus Symmetriegründen einleuchtend wäre. Der Rest erklärt sich über die Unschärferelation.

Wenn man  $\Delta t = T_{1/2}$  setzt, ist die Frequenzunschärfe  $\Delta\omega = \lambda$  gleich der Zerfallskonstanten. Setzen wir hingegen die mittlere Zerfallszeit eines einzelnen Isotops  $\Delta t = 2T_{1/2}/N_0$ , so muß die Frequenzunschärfe  $\Delta\omega = \lambda N_0/2$  um ein Vielfaches größer sein, d.h. die radioaktiven Teilchen können dann nur unter erheblich höherer Energiezufuhr entstanden sein und haben nach ihrer Erzeugung dennoch keine kürzere Lebensdauer als unter normalen Bedingungen. Da die Halbwertszeiten oft recht hoch sind, können mit statischen Meßmethoden nur niederenergetische, d.h. langsam bewegte Atome gemessen werden, und die Messung wird entsprechend ungenau (unscharf). Würden die radioaktiven Isotope hingegen auf nahezu Lichtgeschwindigkeit beschleunigt, könnte man die radioaktiven Zerfälle sehr präzise vorhersagen, weil sich die zeitliche Unschärfe beliebig klein halten läßt. Es liegt also weniger in der vermeintlichen Natur der Dinge, etwa an einer prinzipiellen Unvorhersagbarkeit, warum man den radioaktiven Zerfall nicht deterministisch bestimmen kann, sondern eher an falsch gewählten Meßbedingungen, daß der Zufall eine so gewichtige Rolle spielt. Darin spiegelt sich augenscheinlich ein höherer Bezug zur speziellen Relativität wider.