

Physikaufgabe 171

[Home](#) | [Startseite](#) | [Impressum](#) | [Kontakt](#) | [Gästebuch](#)

Aufgabe: Berechnen Sie, wann das 1,5-Grad-Ziel der Erderwärmung erreicht wird.

Lösung: In seiner einfachsten Annahme nimmt der globale Temperaturmittelwert linear mit der Zeit zu. Dies ist in Abb. 1 dargestellt. Bis zur Zeit t_0 gelte der langjährige Temperaturmittelwert T_0 . Die Zeit t_1 entspricht dem Temperaturmittelwert \bar{T}_1 , wie er heute vorliegt. Aufgrund der zeitlichen Mittelung ist der aktuelle Temperaturmittelwert stets größer als der langjährige konstante Temperaturmittelwert T_0 , aber auch kleiner als der Jahrestemperaturmittelwert T_1 .

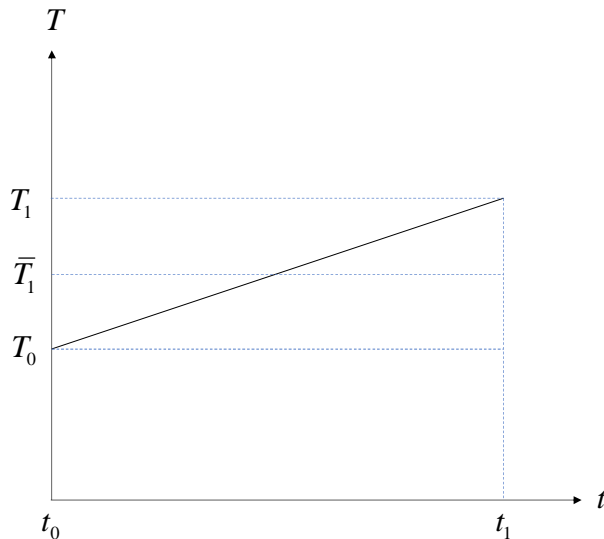


Abbildung 1. Lineare Zunahme der Erderwärmung

Theoretisch ergibt sich der Temperaturmittelwert aus der Ausgleichsgeraden eines – statistischen Schwankungen unterworfenen – linearen Temperaturverlaufs seit Beginn der Meßaufzeichnungen,

$$T(t) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{t_1 - t_0} (t - t_0),$$

mit der Steigung $(T_1 - T_0)/(t_1 - t_0)$ und der Ordinaten T_0 . Hierbei wird über das Intervall $[t_0, t_1]$ integriert. Das Ergebnis ist trivial:

$$\begin{aligned} \bar{T}_1 &= \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} T(t) dt = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \left[T_0 + \frac{T_1 - T_0}{t_1 - t_0} (t - t_0) \right] dt \\ &= T_0 + \frac{1}{t_1 - t_0} \frac{T_1 - T_0}{t_1 - t_0} \int_0^{t_1 - t_0} x dx = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{2} = \frac{T_0 + T_1}{2}. \end{aligned}$$

Derzeit liegt die Erderwärmung bei

$$\bar{T}_1 - T_0 = \frac{T_1 - T_0}{2} = 1,2 \text{ K},$$

Physikaufgabe 171

das entspricht überschlägig einer jährlichen Zuwachsrate von

$$\frac{\bar{T}_1 - T_0}{t_1 - t_0} = \frac{1,2 \text{ K}}{120 \text{ a}} = \frac{1}{100} \frac{\text{K}}{\text{a}}.$$

Tatsächlich hat damit die Temperatur im Jahresmittelwert um $T_1 - T_0 = 2,4 \text{ K}$ zugenommen. Die Annahme einer linearen Temperaturänderung ist jedoch lediglich empirisch und damit unphysikalisch. In Abb. 2 haben wir daher einen realistischeren exponentiellen Temperaturzuwachs angenommen.

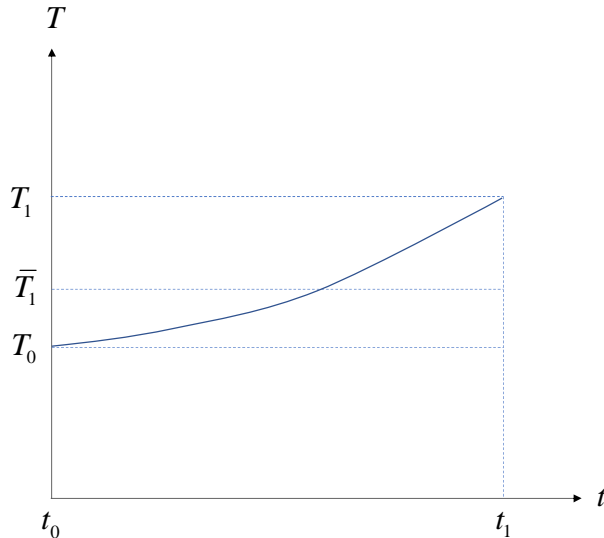


Abbildung 2. Exponentielle Zunahme der Erderwärmung

Diesem legen wir das ideale Gasgesetz zugrunde,

$$pV = nRT,$$

wobei p der Druck, V das Volumen, n die Molzahl und R die Gaskonstante ist. Diesen Ausdruck formen wir entsprechend um,

$$T = \frac{pV}{nR},$$

und bilden davon das totale Differential,

$$dT = \frac{pdV}{nR} + \frac{Vdp}{nR} - \frac{pV}{n^2R} dn = T \left(\frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} - \frac{dn}{n} \right).$$

Dieses Ergebnis dividieren wir durch das Zeitdifferential,

$$\frac{dT}{dt} = T \left(\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} + \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} - \frac{1}{n} \frac{dn}{dt} \right),$$

und setzen den Klammerausdruck gleich einer Konstanten

Physikaufgabe 171

$$\begin{aligned}k &= \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} + \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} - \frac{1}{n} \frac{dn}{dt} = \frac{d}{dt} (\ln V + \ln p - \ln n) \\ &= \frac{d}{dt} \ln \frac{pV}{n} = \frac{d}{dt} \ln RT = \frac{d \ln T}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dT}{dt},\end{aligned}$$

da sich durch die Erhöhung der Stoffmenge zunächst nur Volumen und Druck ändern. Aufgrund der idealen Gasgleichung ändert sich damit allerdings auch die Temperatur. Bringen wir nun noch das Zeitdifferential auf die andere Seite,

$$k dt = \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} - \frac{dn}{n} = \frac{dT}{T},$$

können wir geschlossen integrieren:

$$k \int_{t_0}^t dt = \int_{V_0}^V \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} \int_{p_0}^p - \int_{n_0}^n \frac{dn}{n} = \int_{T_0}^T \frac{dT}{T}.$$

Das Ergebnis lautet:

$$k(t-t_0) = \ln \frac{V}{V_0} + \ln \frac{p}{p_0} - \ln \frac{n}{n_0} = \ln \frac{pVn_0}{p_0V_0n} = \ln \frac{pVn_0R}{nRp_0V_0} = \ln \frac{T}{T_0}.$$

Lösen wir diesen Ausdruck nach der Temperatur T auf, ergibt sich eine exponentielle Zeitabhängigkeit,

$$T(t) = T_0 e^{k(t-t_0)}.$$

Die Temperaturänderung ist also wieder eine Exponentialfunktion, $dT/dt = kT$. Die Mittelwertbildung erfolgt standardmäßig durch das Flächenintegral über die Zeit,

$$\int_{t_0}^{t_1} T(t) dt = \bar{T}_1 (t_1 - t_0).$$

Setzen wir den Mittelwert dem tatsächlich integrierten Verlauf gleich, ergibt sich

$$\begin{aligned}\bar{T}_1 &= \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} T(t) dt = \frac{1}{t_1 - t_0} T_0 \int_{t_0}^{t_1} e^{k(t-t_0)} dt = \frac{T_0}{k(t_1 - t_0)} \int_0^{k(t_1-t_0)} e^x dx \\ &= \frac{T_0}{k(t_1 - t_0)} \left(e^{k(t_1-t_0)} - 1 \right) \approx \frac{T_0}{k(t_1 - t_0)} \left(k(t_1 - t_0) + \frac{1}{2} k^2 (t_1 - t_0)^2 + \frac{1}{6} k^3 (t_1 - t_0)^3 + \dots \right)\end{aligned}$$

Die exakte Lösung führt zu einer impliziten Gleichung in k , die analytisch nicht lösbar ist. Wir nehmen aber an, daß k klein ist, so daß wir die Exponentialfunktion im Minimum bis zu Gliedern 2. Ordnung entwickeln können, womit wir einen Ausdruck erhalten, den wir dann nach k auflösen können,

Physikaufgabe 171

$$\bar{T}_1 = \frac{T_0}{k(t_1 - t_0)} \left(k(t_1 - t_0) + \frac{1}{2} k^2 (t_1 - t_0)^2 \right) = T_0 \left(1 + \frac{1}{2} k (t_1 - t_0) \right).$$

Die Zuwachsrate lautet somit

$$k = \frac{2(\bar{T}_1 - T_0)}{T_0(t_1 - t_0)}.$$

Bei einer Zunahme des Temperaturmittelwerts von derzeit

$$\bar{T}_1 - T_0 = \frac{1}{2} T_0 k (t_1 - t_0) = 1,2 \text{ K}$$

in einem Zeitraum von 120 Jahren ergibt sich mit dem Langzeitmittelwert von 14 °C eine Rate von

$$k = \frac{1}{287 \text{ K}} \frac{2,4 \text{ K}}{120 \text{ a}} = \frac{7 \cdot 10^{-5}}{\text{a}}.$$

Durch Umformen von

$$\bar{T}_1 = T_0 \left(1 + \frac{1}{2} k (t_1 - t_0) \right)$$

entspricht dies genau wie beim linearen Verlauf einem Temperaturanstieg von

$$\frac{\bar{T}_1 - T_0}{t_1 - t_0} = \frac{k T_0}{2} = 3,5 \cdot 10^{-5} \cdot 287 \frac{\text{K}}{\text{a}} = 1005 \cdot 10^{-5} = \frac{1}{100} \frac{\text{K}}{\text{a}},$$

also gerade einmal einem Hundertstel Kelvin pro Jahr. In zehn Jahren ergibt sich eine Zunahme von 1/10 Grad und in hundert Jahren eine globale Erwärmung um 1 K. In dreißig Jahren wird also die 1,5-Gradmarke erreicht, d.h. nach dieser Rechnung im Jahr 2052, vorausgesetzt, daß sich die Emissionen nicht noch beschleunigen. Die 2-Grad-Marke dürfe 2082 überschritten werden und die 3-Grad-Grenze im Jahre 2132. Dann sollte aber sowieso keiner der heute lebenden Menschen mehr unter den Lebenden sein.

Wir zeigen nun noch, daß der Wert für k lediglich eine obere Abschätzung ist, der wahre Wert liegt etwas niedriger. Entwickeln wir nämlich bis zur 3. Ordnung, erhalten wir eine quadratische Gleichung in k ,

$$k^2 + \frac{3}{t_1 - t_0} k - \frac{6(\bar{T}_1 - T_0)}{T_0(t_1 - t_0)^2} = 0.$$

Deren Lösungen sind gegeben durch

Physikaufgabe 171

$$k = -\frac{3}{2(t_1 - t_0)} \pm \sqrt{\frac{9}{4(t_1 - t_0)^2} + \frac{6(\bar{T}_1 - T_0)}{T_0(t_1 - t_0)^2}}.$$

Mit dem positiven Vorzeichen ergibt sich in erster Näherung der Ausdruck 2. Ordnung,

$$k = \frac{3}{2(t_1 - t_0)} \left(\sqrt{1 + \frac{8(\bar{T}_1 - T_0)}{3T_0}} - 1 \right) \approx \frac{3}{2(t_1 - t_0)} \frac{4(\bar{T}_1 - T_0)}{3T_0} = \frac{2(\bar{T}_1 - T_0)}{T_0(t_1 - t_0)},$$

und wenn wir die binomische Näherung noch um ein Glied erweitern,

$$\begin{aligned} k &= \frac{3}{2(t_1 - t_0)} \left(\sqrt{1 + \frac{8(\bar{T}_1 - T_0)}{3T_0}} - 1 \right) \approx \frac{3}{2(t_1 - t_0)} \left(\frac{4(\bar{T}_1 - T_0)}{3T_0} - \frac{8(\bar{T}_1 - T_0)^2}{9T_0^2} \right) \\ &= \frac{2(\bar{T}_1 - T_0)}{T_0(t_1 - t_0)} \left(1 - \frac{2(\bar{T}_1 - T_0)}{3T_0} \right) < \frac{2(\bar{T}_1 - T_0)}{T_0(t_1 - t_0)}, \end{aligned}$$

nimmt der Mittelwert sogar etwas weniger stark zu. Allerdings ist diese Abweichung vernachlässigbar.

Setzen wir schließlich in den obigen Ausdruck

$$k(t - t_0) = \ln \frac{V}{V_0} + \ln \frac{p}{p_0} - \ln \frac{n}{n_0}$$

die Definitionen für Dichte, hydrostatischen Druck und Stoffmenge ein,

$$V = \frac{m}{\rho}, \quad p = \rho gh + p_L, \quad n = \frac{m}{M},$$

wobei m die Masse, ρ die Dichte, g die Erdbeschleunigung am Boden, h die Höhe der Luftsäule über Grund, p_L der Luftdruck und M die molare Masse sind, so erhalten wir

$$\begin{aligned} k(t - t_0) &= \ln \frac{m\rho_0}{m_0\rho} + \ln \frac{\rho gh + p_L}{\rho_0 gh + p_L^0} - \ln \frac{m}{m_0} \\ &= \ln \frac{1 + \frac{p_L}{\rho gh}}{1 + \frac{p_L^0}{\rho_0 gh}} \approx \frac{p_L}{\rho gh} - \frac{p_L^0}{\rho_0 gh} \approx \left(\frac{p_L}{\rho} - \frac{p_L^0}{\rho_0} \right) \frac{1}{gh}. \end{aligned}$$

Die mit einer Null indizierten Variablen geben die Werte zum Zeitpunkt t_0 an.

Da die Dichte der Luft mit steigender Erwärmung abnimmt und der Luftdruck mit wachsender Temperatur steigt, ergibt sich auf jeden Fall ein positiver Wert, der im Einklang mit dem exponentiellen Verhalten steht.