

Physikaufgabe 160

[Home](#) | [Startseite](#) | [Impressum](#) | [Kontakt](#) | [Gästebuch](#)

Aufgabe: Berechnen Sie anhand einer geeigneten Parametrisierung die Größe des sichtbaren Universums.

Lösung: In Aufgabe [158] haben wir ein Weltall simuliert, das aus zwei nahtlos aneinander angrenzenden Singularitäten besteht, einer Punktsingularität mit Radius r und einer Randsingularität mit Radius $R_S - r$, die der Bedingung $r + (R_S - r) = R_S$ genügen. Ein solches Universum bietet jedoch keinen Platz für ein zwischen den Singularitäten eingeschlossenes sichtbares Universum. Vielmehr muß für ein Universum mit sichtbarem All ein Hohlraum zwischen beiden Singularitäten vorhanden sein, damit die Massebilanz $M = M_P + M_U + M_R$ erfüllt werden kann, wobei M die Gesamtmasse aus Punktsingularität M_P , Randsingularität M_R und sichtbarem Universum M_U angibt. Ein Universum mit Hohlraum muß daher die Bedingung

$$r^n + (R_S - r)^n = r^n + \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} R_S^{n-k} r^k \leq R_S^n$$

erfüllen. Wenn ein solcher Hohlraum nicht vorhanden ist, gilt bei räumlich und zeitlich homogener Oberflächendichte σ aufgrund der Massenerhaltung zu jedem Zeitpunkt die Relation

$$M = 4\pi\sigma R_S^2 = 4\pi\sigma r^2 + 4\pi\sigma (R_S^2 - r^2).$$

Verwenden wir den binomischen Satz,

$$r^2 + (R_S - r)^2 = r^2 + \sum_{k=0}^2 (-1)^k \binom{2}{k} R_S^{2-k} r^k = R_S^2 - 2r(R_S - r),$$

und formen in entsprechend um,

$$(R_S^2 - r^2) = (R_S - r)^2 + 2r(R_S - r),$$

so setzt sich die Masse aus 3 Beiträgen zusammen:

$$M = 4\pi\sigma R_S^2 = 4\pi\sigma r^2 + 8\pi\sigma r(R_S - r) + 4\pi\sigma (R_S - r)^2 = M_P + M_U + M_R,$$

den Massen der beiden Singularitäten, die nicht überlappen können, und der Masse des sichtbaren Universums. Je nachdem, ob man die Masse flächenhaft oder räumlich verteilt, gilt entweder

$$M_U = 8\pi\sigma r(R_S - r) = 4\pi\sigma R_S^2 \frac{2r}{R_S} \left(1 - \frac{r}{R_S}\right) = \frac{2r}{R_S} \left(1 - \frac{r}{R_S}\right) M$$

oder

Physikaufgabe 160

$$M_U = \frac{4\pi}{3} \rho R_S^3 \frac{2r^2}{R_S^2} \left(1 - \frac{r}{R_S}\right) = \frac{2r^2}{R_S^2} \left(1 - \frac{r}{R_S}\right) M.$$

Die Masse der Randsingularität umfaßt jedoch nicht die gesamte Masse, die ihr nach dem Massenerhaltungssatz zukommen würde, sondern sie spaltet nach dem Satz des Pythagoras in zwei Beiträge auf, und zwar in die Masse einer reduzierten Singularität und in die Masse des sichtbaren Universums. Auch wenn die Radien der beiden Singularitäten sich scheinbar berühren, hat das sichtbare Universum dennoch einen Radius

$$r_U = 2r(R_S - r) = R_S \sqrt{\frac{2r}{R_S} \left(1 - \frac{r}{R_S}\right)} \quad \text{bzw.} \quad r_U = R_S \sqrt[3]{\frac{2r^2}{R_S^2} \left(1 - \frac{r}{R_S}\right)},$$

den sogenannten Hohlraumradius des sichtbaren Universums, der in den Schwarzschildradius eingeht:

$$r = \sqrt{r_P^2 + r_U^2 + r_R^2} = \sqrt{r^2 + 2r(R_S - r) + (R_S - r)^2} = R_S.$$

Eine geeignete Parametrisierung stellen die Lösungen

$$r_P = R_S \sin^2 \frac{\varphi}{4}, \quad r_R = R_S \cos^2 \frac{\varphi}{4}, \quad r_U = \sqrt{2R_P R_R} = \sqrt{2} R_S \sin \frac{\varphi}{4} \cos \frac{\varphi}{4}$$

dar, wie man anhand der Identität

$$\left(\sin^2 \frac{\varphi}{4} + \cos^2 \frac{\varphi}{4}\right)^2 = \sin^4 \frac{\varphi}{4} + 2 \sin^2 \frac{\varphi}{4} \cos^2 \frac{\varphi}{4} + \cos^4 \frac{\varphi}{4} = 1$$

leicht nachrechnen kann. Würde man die Beiträge hingegen linear addieren, wäre der Radius

$$r = r_P + r_U + r_R = R_S \left(\cos^2 \frac{\varphi}{4} + \sqrt{2} \sin \frac{\varphi}{4} \cos \frac{\varphi}{4} + \sin^2 \frac{\varphi}{4} \right) = R_S \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{2} \sin \frac{\varphi}{2} \right) \geq 1,$$

was aber nicht sein kann, da das All nicht über den Ereignishorizont hinausreicht. Der Radius beider Singularitäten ist folglich kleiner oder gleich dem Schwarzschildradius,

$$\sqrt{r_P^2 + r_R^2} = R_S \sqrt{\sin^4 \frac{\varphi}{4} + \cos^4 \frac{\varphi}{4}} = R_S \sqrt{1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{4} \cos^2 \frac{\varphi}{4}} = R_S \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \leq R_S,$$

womit noch Platz für das sichtbare All bleibt. In diesem Hohlraum ist allerdings kein Vakuum vorhanden, sondern Materie. Das sichtbare All hätte bei gleichförmiger Dichte ρ eine Masse

$$M_U = \frac{4\pi}{3} \rho r_U^3 = \frac{2r^2}{R_S^2} \left(1 - \frac{r}{R_S}\right) M,$$

Physikaufgabe 160

die für $r = 0$ und $r = R_S$, also zum Zeitpunkt des Urknalls, verschwindet. Für $r = R_S/2$ wäre die Masse sogar maximal, nämlich gleich $M/4$. Da Masse nicht verlorengehen kann, muß sie im sichtbaren Teil des Universums zwischen den Singularitäten stecken. Das erklärt, warum es ein sichtbares All gibt, dessen Masse bis zu einem Maximum zunimmt und danach wieder ab. Masse verschwindet nicht im Vakuum, sondern vielmehr in den beiden Singularitäten, die das sichtbare All umgeben.

Anmerkung: Auch ein lineares oder kubisches Universum wäre theoretisch denkbar. Ein lineares Universum kann allerdings kein sichtbares Universum einschließen, denn

$$r + (R_S - r) = r + \sum_{k=0}^1 (-1)^k \binom{1}{k} R_S^{1-k} r^k = r + R_S - r = R_S.$$

Das folgt aus dem Erhaltungssatz $M_P + M_R = 2\pi\lambda r + 2\pi\lambda (R_S - r) = 2\pi\lambda R_S = M$, wobei die lineare Massendichte durch $\lambda = M/2\pi R_S$ gegeben ist. Im Falle des kubischen Universums wäre

$$\begin{aligned} r^3 + (R_S - r)^3 &= r^3 + \sum_{k=0}^3 (-1)^k \binom{3}{k} R_S^{3-k} r^k = r^3 + R_S^3 - 3R_S^2 r + 3R_S r^2 - r^3 \\ &= r^3 - 3R_S r (R_S - r) + R_S^3 - r^3 \end{aligned}$$

bzw. nach Umformung

$$\frac{4\pi}{3} \rho r^3 + 4\pi\rho R_S r (R_S - r) + \frac{4\pi}{3} \rho (R_S - r)^3 = \frac{4\pi}{3} \rho R_S^3$$

mit dem Radius $r_U = \sqrt[3]{3R_S r (R_S - r)}$.

Für eine sinnvolle Beschreibung des Weltalls, in dem die Masse über die Oberfläche der Singularitäten verteilt sind, bietet sich $n = 2$ an. Wir nehmen daher an, daß der innere Radius des Universums quadratisch mit dem Sinus des viertelten Drehwinkels φ in der x - y -Ebene zunimmt, d.h.

$$r(\varphi) = R_S \sin^2 \frac{\varphi}{4}.$$

Setzen wir ihn in die in Aufgabe [\[158\]](#) abgeleiteten Toruskordinaten ein,

$$x(\varphi, \theta) = (R_S + r \cos \theta) \cos \varphi, \quad y(\varphi, \theta) = (R_S + r \cos \theta) \sin \varphi, \quad z(\varphi, \theta) = r \sin \theta,$$

erhalten wir die Koordinaten der Punktsingularität (siehe Abb. 1):

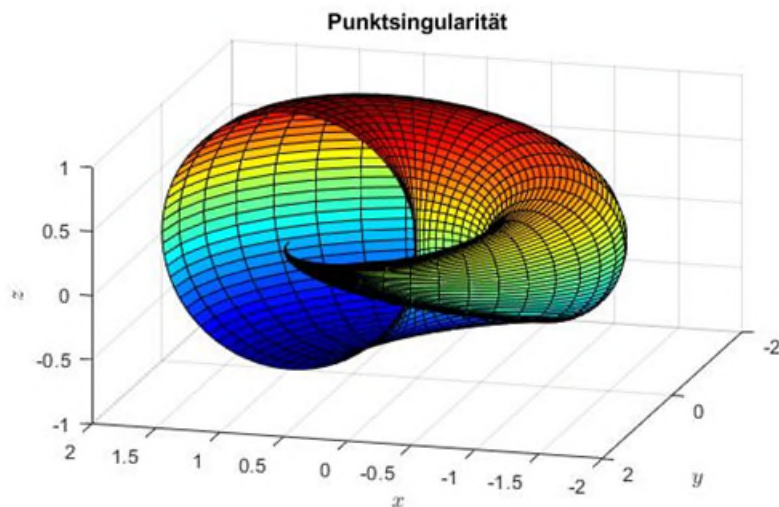


Abbildung 1. Die Punktsingularität weist außer im Nullpunkt keine Unstetigkeit auf und ist hyperbolisch gekrümmt

$$x_P = R_S \left(1 + \sin^2 \frac{\varphi}{4} \cos \theta \right) \cos \varphi,$$

$$y_P = R_S \left(1 + \sin^2 \frac{\varphi}{4} \cos \theta \right) \sin \varphi,$$

$$z_P = R_S \sin^2 \frac{\varphi}{4} \sin \theta,$$

wobei $\theta \in [0, 2\pi]$ der Winkel senkrecht zur x - y -Ebene in Richtung z -Achse ist. Der Radius dieser Singularität mit Mittelpunkt $(R_S \cos \varphi, R_S \sin \varphi, 0)$ hat den Wert

$$r_P(\varphi) = \sqrt{(x_P - R_S \cos \varphi)^2 + (y_P - R_S \sin \varphi)^2 + z_P^2} = R_S \sin^2 \frac{\varphi}{4}$$

und nimmt von null bis zum Schwarzschildradius R_S kontinuierlich zu.

Die Koordinaten der Randsingularität erhalten wir, indem wir die Koordinaten der Punktsingularität von denen des geschlossenen Universums abziehen:

$$x_R = x - x_P = R_S \left(1 - \sin^2 \frac{\varphi}{4} \right) \cos \theta \cos \varphi = R_S \cos^2 \frac{\varphi}{4} \cos \theta \cos \varphi,$$

$$y_R = y - y_P = R_S \left(1 - \sin^2 \frac{\varphi}{4} \right) \cos \theta \sin \varphi = R_S \cos^2 \frac{\varphi}{4} \cos \theta \sin \varphi,$$

$$z_R = z - z_P = R_S \left(1 - \sin^2 \frac{\varphi}{4} \right) \sin \theta = R_S \cos^2 \frac{\varphi}{4} \sin \theta.$$

Die Randsingularität (Abb. 2) hat den Radius $r_R(\varphi) = R_S \cos^2(\varphi/4)$.

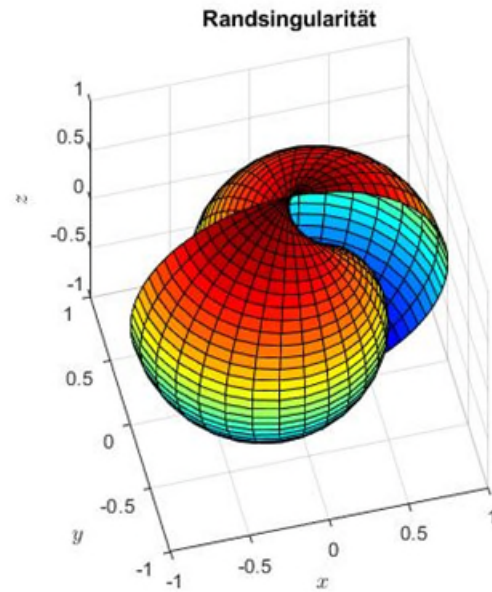


Abbildung 2. Die Randsingularität verschwindet bei der doppelten Kreiszahl in der Null

Sie beginnt mit $R_R(0) = R_S$ und nimmt bis zu $R_R(2\pi) = 0$ ab. Addieren wir Punkt- und Randsingularität komponentenweise,

$$\begin{aligned} x &= x_P + x_R = R_S \left(1 + \sin^2 \frac{\varphi}{4} \cos \theta \right) \cos \varphi + R_S \cos^2 \frac{\varphi}{4} \cos \theta \cos \varphi = R_S (1 + \cos \theta) \cos \varphi, \\ y &= y_P + y_R = R_S \left(1 + \sin^2 \frac{\varphi}{4} \cos \theta \right) \sin \varphi + R_S \cos^2 \frac{\varphi}{4} \cos \theta \sin \varphi = R_S (1 + \cos \theta) \sin \varphi, \\ z &= z_P + z_R = R_S \sin^2 \frac{\varphi}{4} \sin \theta + R_S \cos^2 \frac{\varphi}{4} \sin \theta = R_S \sin \theta, \end{aligned}$$

erhalten wir den lochfreien Torus um den Mittelpunkt $(R_S \cos \varphi, R_S \sin \varphi, 0)$ mit winkelunabhängigem Radius

$$r(\varphi) = \sqrt{(x - R_S \cos \varphi)^2 + (y - R_S \sin \varphi)^2 + z^2} = R_S.$$

Dieser setzt sich zusammen aus den Radien von Punkt- und Randsingularität und sichtbarem Universum

$$r(\varphi) = \sqrt{r_P^2(\varphi) + r_R^2(\varphi) + r_U^2(\varphi)} = R_S \sqrt{\sin^4 \frac{\varphi}{4} + \cos^4 \frac{\varphi}{4} + 2 \sin^2 \frac{\varphi}{4} \cos^2 \frac{\varphi}{4}} = R_S.$$

Der Radius des sichtbaren Universums hingegen lautet

$$r_U(\varphi) = \sqrt{2r(R_S - r)} = R_S \sqrt{2 \sin^2 \frac{\varphi}{4} \left(1 - \sin^2 \frac{\varphi}{4} \right)} = \sqrt{2} R_S \sin \frac{\varphi}{4} \cos \frac{\varphi}{4}.$$

Physikaufgabe 160

Das gleiche Ergebnis erhält man, wenn die Wurzel aus der Quadratsumme der Komponenten zieht:

$$x_U = \sqrt{(x - R_S \cos \varphi)^2 - x_R^2 - (x_P - R_S \cos \varphi)^2} = \sqrt{2} R_S \sin \frac{\varphi}{4} \cos \frac{\varphi}{4} \cos \theta \cos \varphi,$$

$$y_U = \sqrt{(y - R_S \sin \varphi)^2 - y_R^2 - (y_P - R_S \sin \varphi)^2} = \sqrt{2} R_S \sin \frac{\varphi}{4} \cos \frac{\varphi}{4} \cos \theta \sin \varphi,$$

$$z_U = \sqrt{z^2 - z_R^2 - z_P^2} = \sqrt{2} R_S \sin \frac{\varphi}{4} \cos \frac{\varphi}{4} \sin \theta.$$

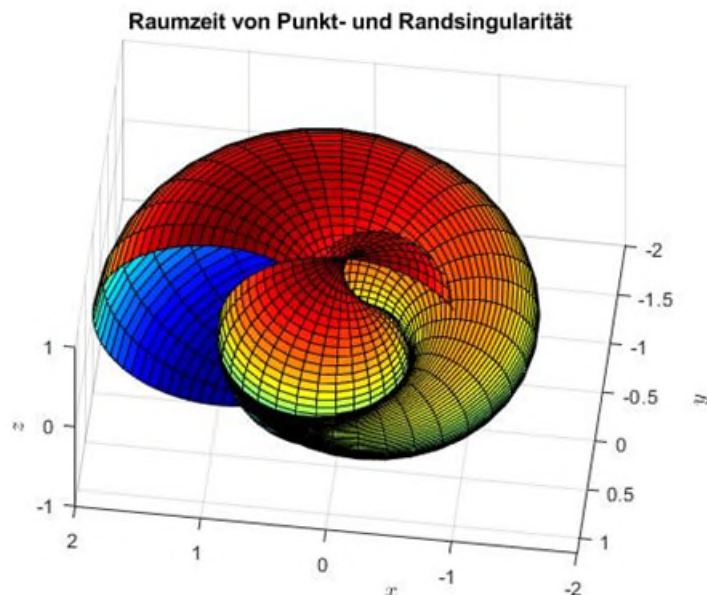
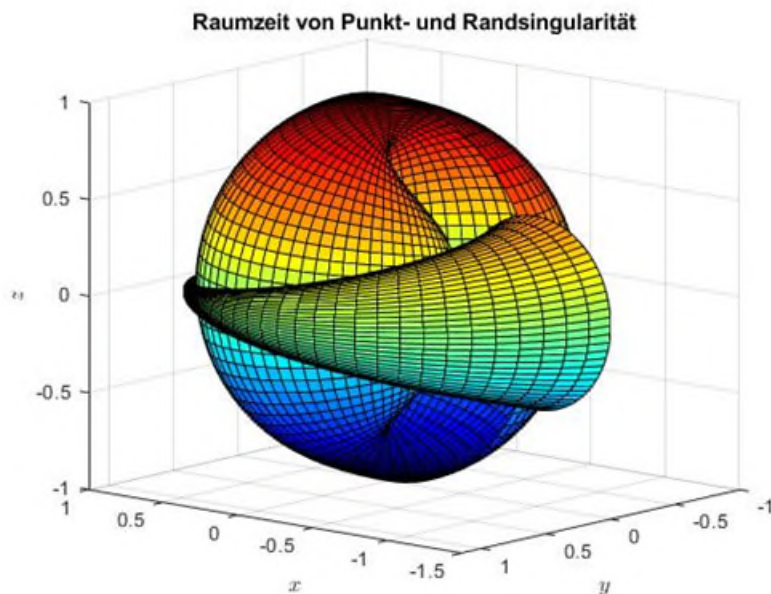


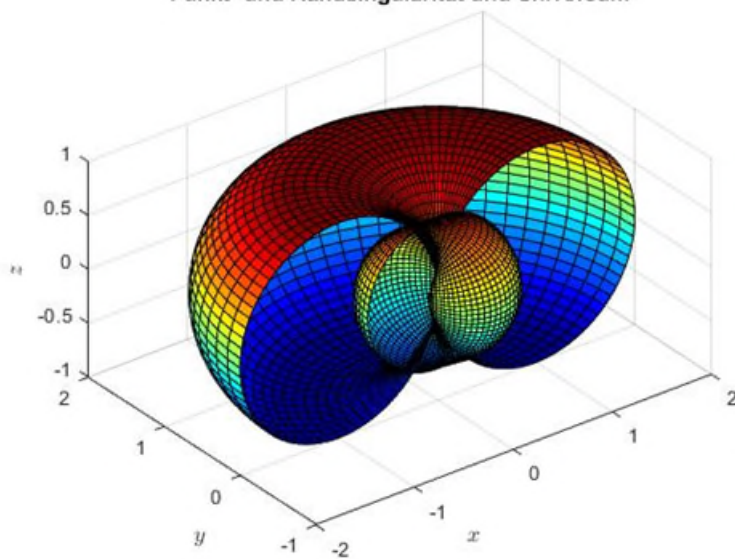
Abbildung 3. Die Punktsingularität umschlingt die Randsingularität (oben halbe Periode, unten volle Periode)

Die Wurzel aus der Quadratsumme der Komponenten des Alls liefert dann ebenfalls die Toruskordinaten zurück,

Physikaufgabe 160

$$\begin{aligned}
 x &= R_S \cos \varphi + \sqrt{(x_P - R_S \cos \varphi)^2 + x_R^2 + x_U^2} \\
 &= R_S \cos \varphi \left(1 + \cos \theta \sqrt{\sin^4 \frac{\varphi}{4} + \cos^4 \frac{\varphi}{4} + 2 \sin^2 \frac{\varphi}{4} \cos^2 \frac{\varphi}{4}} \right) = R_S \cos \varphi (1 + \cos \theta), \\
 y &= R_S \sin \varphi + \sqrt{(y_P - R_S \sin \varphi)^2 + y_R^2 + y_U^2} \\
 &= R_S \sin \varphi \left(1 + \sin \theta \sqrt{\sin^4 \frac{\varphi}{4} + \cos^4 \frac{\varphi}{4} + 2 \sin^2 \frac{\varphi}{4} \cos^2 \frac{\varphi}{4}} \right) = R_S \sin \varphi (1 + \sin \theta), \\
 z &= \sqrt{z_P^2 + z_R^2 + z_U^2} = R_S \sin \theta \sqrt{\sin^4 \frac{\varphi}{4} + \cos^4 \frac{\varphi}{4} + 2 \sin^2 \frac{\varphi}{4} \cos^2 \frac{\varphi}{4}} = R_S \sin \theta.
 \end{aligned}$$

Punkt- und Randsingularität und Universum



Punkt- und Randsingularität und Universum

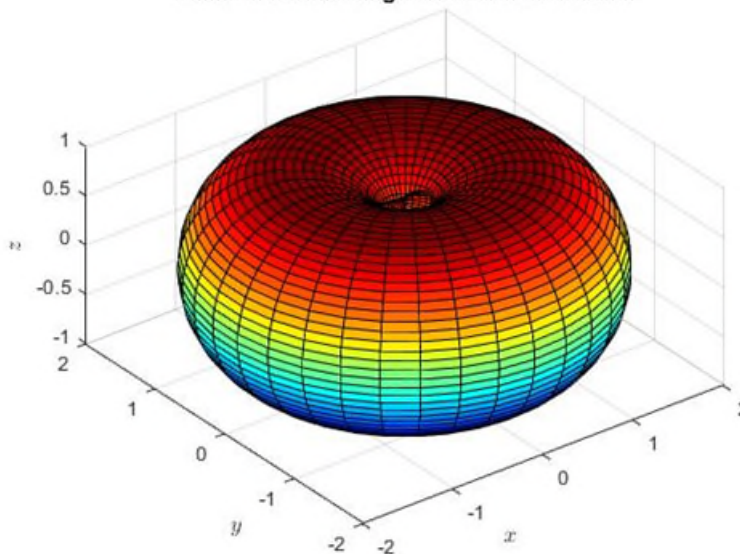


Abbildung 4. Zwischen den Singularitäten eingebettetes Universum (oben halbe Periode, unten volle Periode)

Physikaufgabe 160

Eine quadratische Addition der Koordinaten von Punkt- und Randsingularität mit Universum liefert also dasselbe Ergebnis wie die gewöhnliche lineare Addition der Koordinaten der beiden Singularitäten ohne Universum.

Um einen besseren Einblick ins Innenleben der Singularitäten zu erhalten, haben wir die Flächen zusätzlich bis zur halben Periode aufgetragen.

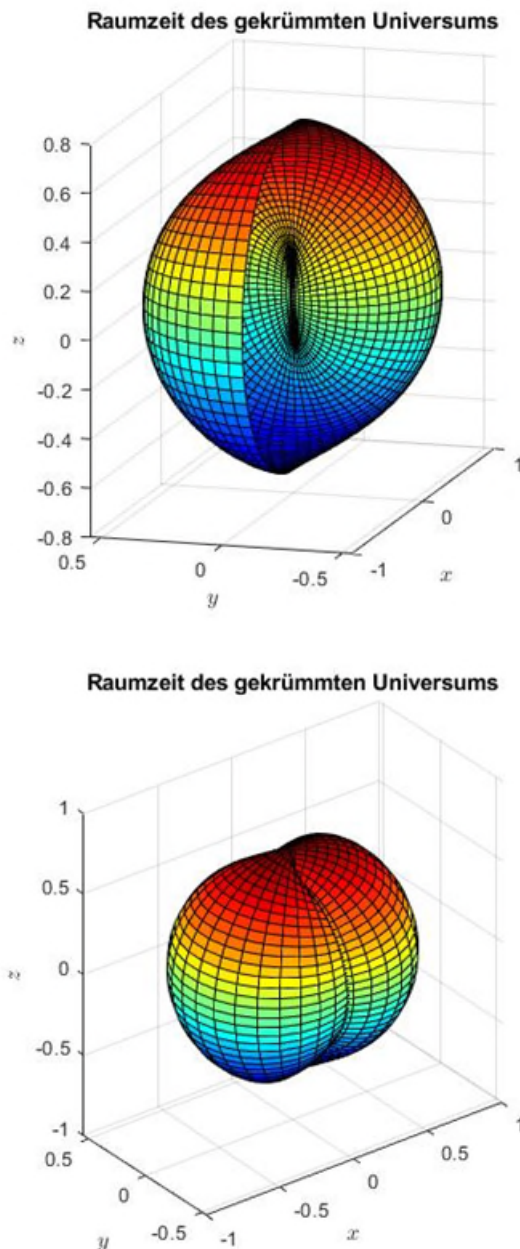


Abbildung 5. Raumzeit des sichtbaren Universums (oben halbe Periode, unten volle Periode)

Die Punktsingularität entsteht auf dem Rand der Randsingularität, wobei die Massenzunahme im mathematisch-positiven Drehsinn erfolgt. In Abb. 3 erkennt man, wie die Punktsingularität die Randsingularität förmlich umschlingt. Bei Überlagerung der zeitlichen Entwicklung ergeben sich jedoch die Verhältnisse in Abb. 4. Die Massen sind dabei auf den Oberflächen der jeweiligen Singularitäten konzentriert, wobei das sichtbare All den Raum dazwischen ausfüllt

Physikaufgabe 160

(Abb. 4). Gemäß der eingangs formulierten Gleichungen erreicht das sichtbare All nach Ablauf seiner halben Lebensdauer sein Ausdehnungsmaximum, ehe es sich wieder zusammenzieht.

Um unser Modell zu validieren, benötigen wir die Ableitungen der Koordinaten von Punkt- und Randsingularität nach φ und θ . Die Koordinaten der Punktsingularität haben folgende Ableitungen nach φ ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_U}{\partial \varphi} &= \frac{1}{2} \sqrt{2} R_s \cos \theta \left[\frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \varphi - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right], \\ \frac{\partial y_U}{\partial \varphi} &= \frac{1}{2} \sqrt{2} R_s \cos \theta \left[\frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \sin \varphi + \sin \frac{\varphi}{2} \cos \varphi \right], \\ \frac{\partial z_U}{\partial \varphi} &= \frac{1}{4} \sqrt{2} R_s \sin \theta \cos \frac{\varphi}{2}\end{aligned}$$

und folgende Ableitungen nach θ ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_U}{\partial \theta} &= -\frac{1}{2} \sqrt{2} R_s \sin \frac{\varphi}{2} \sin \theta \cos \varphi, \\ \frac{\partial y_U}{\partial \theta} &= -\frac{1}{2} \sqrt{2} R_s \sin \frac{\varphi}{2} \sin \theta \sin \varphi, \\ \frac{\partial z_U}{\partial \theta} &= \frac{1}{2} \sqrt{2} R_s \sin \frac{\varphi}{2} \cos \theta\end{aligned}$$

Die Tangentialebene läßt sich beschreiben durch die beiden Tangentialvektoren \mathbf{r}_φ und \mathbf{r}_θ längs der Koordinatenlinien und den dazu senkrechten Normalenvektor \mathbf{N} . Für das Universum gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_\varphi &= \frac{\partial x_U}{\partial \varphi} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y_U}{\partial \varphi} \mathbf{e}_y + \frac{\partial z_U}{\partial \varphi} \mathbf{e}_z = \frac{1}{2} \sqrt{2} R_s \cos \theta \left[\frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \varphi - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right] \mathbf{e}_x \\ &\quad + \frac{1}{2} \sqrt{2} R_s \cos \theta \left[\frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \sin \varphi + \sin \frac{\varphi}{2} \cos \varphi \right] \mathbf{e}_y + \frac{1}{4} \sqrt{2} R_s \sin \theta \cos \frac{\varphi}{2} \mathbf{e}_z\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}|\mathbf{r}_\varphi| &= \sqrt{\left(\frac{\partial x_U}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_U}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_U}{\partial \varphi}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2} R_s \left\{ \cos^2 \theta \left[\frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \varphi - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \cos^2 \theta \left[\frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \sin \varphi + \sin \frac{\varphi}{2} \cos \varphi \right]^2 + \frac{1}{4} \sin^2 \theta \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right\}^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2} R_s \sqrt{\frac{1}{4} \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \cos^2 \theta \sin^2 \frac{\varphi}{2}}\end{aligned}$$

und

Physikaufgabe 160

$$\mathbf{r}_\theta = \frac{\partial x_P}{\partial \theta} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y_P}{\partial \theta} \mathbf{e}_y + \frac{\partial z_P}{\partial \theta} \mathbf{e}_z = \frac{1}{2} \sqrt{2} R_S \sin \frac{\varphi}{2} \left(-\sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x - \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z \right)$$

mit

$$|\mathbf{r}_\theta| = \sqrt{\left(\frac{\partial x_P}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_P}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_P}{\partial \theta} \right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2} R_S \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Das Kreuzprodukt der Ableitungen lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta &= \frac{1}{2} R_S^2 \left(\cos^2 \theta \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right) \mathbf{e}_x \\ &\quad + \frac{1}{2} R_S^2 \left(\cos^2 \theta \sin^2 \frac{\varphi}{2} \sin \varphi - \frac{1}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \varphi \right) \mathbf{e}_y \\ &\quad + \frac{1}{2} R_S^2 \sin \theta \cos \theta \sin^2 \frac{\varphi}{2} \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Dessen Betrag ist gegeben durch

$$|\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta| = \frac{1}{2} R_S^2 \sin \frac{\varphi}{2} \sqrt{\cos^2 \theta \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} \cos^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Der Normalenvektor hat damit folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \frac{\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta}{|\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta|} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \theta \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} \cos^2 \frac{\varphi}{2}}} \left\{ \left(\cos^2 \theta \sin \frac{\varphi}{2} \cos \varphi + \frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right) \mathbf{e}_x \right. \\ &\quad \left. + \left(\cos^2 \theta \sin \frac{\varphi}{2} \sin \varphi - \frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \varphi \right) \mathbf{e}_y + \sin \theta \cos \theta \sin \frac{\varphi}{2} \mathbf{e}_z \right\}. \end{aligned}$$

Am Äquator, d.h. für $\theta = 0$ und $\theta = \pi$, ist er gegeben durch

$$\mathbf{N} = \frac{\left(\sin \frac{\varphi}{2} \cos \varphi + \frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right) \mathbf{e}_x + \left(\sin \frac{\varphi}{2} \sin \varphi - \frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \varphi \right) \mathbf{e}_y}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} \cos^2 \frac{\varphi}{2}}},$$

an den Polen $\theta = \pm \pi/2$ wird er zu

$$\mathbf{N} = \begin{cases} \sin \varphi \mathbf{e}_x - \cos \varphi \mathbf{e}_y & \text{für } |\varphi| \leq \pi/2, \\ -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y & \text{für } |\varphi| > \pi/2. \end{cases}$$

An der Stelle $\varphi = \pm \pi/2$ wechselt er das Vorzeichen. In Tabelle 1 sind einige ausgewählte Werte angegeben. Speziell in den entarteten Polen des Universums für $\varphi = 0$ und $\theta = \pm \pi/2$ gilt

Physikaufgabe 160

$$x_U = 0, \quad y_U = 0, \quad z_U = 0,$$

d.h. die Pole wandern bei wachsenden z -Koordinaten ausschließlich in die positive φ -Richtung. Hat die Punktsingularität für $\varphi = 2\pi$ ihre maximale Größe erreicht, ist die Entartung aufgehoben und es gilt

$$x_U = 0, \quad y_U = 0, \quad z_U = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2} R_S.$$

Am äußeren Äquator für $\theta = 0$ lauten die Werte für $\varphi = \pi$

$$x_U = -\frac{1}{2} \sqrt{2} R_S, \quad y_U = 0, \quad z_U = 0,$$

und am inneren Äquator für $\theta = \pi$ und $\varphi = \pi$ gilt

$$x_U = \frac{1}{2} \sqrt{2} R_S, \quad y_U = 0, \quad z_U = 0.$$

In der nachfolgenden Tabelle 1 wurden alle Größen auf den Schwarzschildradius normiert.

$\frac{x_U}{R_S}$	0	0	$-\sqrt{2}/2$	0	0	0
$\frac{y_U}{R_S}$	0	0	0	0	0	0
$\frac{z_U}{R_S}$	0	0	0	$\pm\sqrt{2}/2$	0	$\pm\sqrt{2}/2$
φ	0	0	π	π	2π	2π
θ	0	$\pm\pi/2$	0	$\pm\pi/2$	0	$\pm\pi/2$
$\frac{\mathbf{r}_\varphi}{R_S}$	$\frac{1}{4}\sqrt{2}\mathbf{e}_x$	$\pm\frac{1}{4}\sqrt{2}\mathbf{e}_z$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}\mathbf{e}_y$	0	$-\frac{1}{4}\sqrt{2}\mathbf{e}_x$	$\mp\frac{1}{4}\sqrt{2}\mathbf{e}_z$
$\frac{\mathbf{r}_\theta}{R_S}$	0	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}\mathbf{e}_z$	$\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\mathbf{e}_x$	0	0
\mathbf{N}	$-\mathbf{e}_y$	$-\mathbf{e}_y$	$-\mathbf{e}_x$	$-\mathbf{e}_y$	\mathbf{e}_y	$-\mathbf{e}_y$

Table 1. Spezielle Werte der Tangentialebene an die Punktsingularität

Das umseitig beigelegte Programm in MATLAB erlaubt es mit Hilfe dieses Tools, die Abbildungen zu drehen. Es konnten nämlich aus Platzgründen nicht alle Perspektiven gezeigt und alle Einblicke gewährt werden.

Nichtlinear haben wir das Programm deshalb genannt, weil wir eine Parametrisierung ausgewählt haben, die mit dem Quadrat des Sinus und Kosinus einhergeht, also keinen einfachen und inkonsistenten linearen Verlauf nimmt.

Physikaufgabe 160

Anhang

```
% Programm zur Veranschaulichung einer nichtlinearen Singularität
clear all

R=1;
theta=linspace(0,2*pi,72);
% phi=linspace(0,2*pi,36);
phi=linspace(0,pi,36);
[Phi,Theta]=meshgrid(phi,theta);

% Punktsingularität
% entsteht auf dem Rand der Randsingularität
% im Abstand des Schwarzschildradius
% und läuft auf einem Torus um die Randsingularität.
% Positiver Drehsinn

x=(R+R.*sin(Phi/4).^2.*cos(Theta)).*cos(Phi);
y=(R+R.*sin(Phi/4).^2.*cos(Theta)).*sin(Phi);
z=R.*sin(Phi/4).^2.*sin(Theta);
figure(1)
surf(x,y,z);
daspect([1 1 1])
colormap('jet')
title('Punktsingularität')
xlabel('$x$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$y$', 'interpreter', 'latex')
zlabel('$z$', 'interpreter', 'latex')
axis([-2 2 -2 2 -1 1])

% Randsingularität
% dreht sich im Inertialsystem
% mit abnehmendem Radius
% um den Koordinatenursprung
x=R.*cos(Phi/4).^2.*cos(Theta).*cos(Phi);
y=R.*cos(Phi/4).^2.*cos(Theta).*sin(Phi);
z=R.*cos(Phi/4).^2.*sin(Theta);
figure(2)
surf(x,y,z);
daspect([1 1 1])
colormap('jet')
title('Randsingularität')
xlabel('$x$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$y$', 'interpreter', 'latex')
zlabel('$z$', 'interpreter', 'latex')
% axis([-1 1 -1 1 -1 1])

% Punkt- und Randsingularität
x=(R+R.*sin(Phi/4).^2.*cos(Theta)).*cos(Phi);
y=(R+R.*sin(Phi/4).^2.*cos(Theta)).*sin(Phi);
z=R.*sin(Phi/4).^2.*sin(Theta);
figure(3)
surf(x,y,z);
x=R.*cos(Phi/4).^2.*cos(Theta).*cos(Phi);
y=R.*cos(Phi/4).^2.*cos(Theta).*sin(Phi);
z=R.*cos(Phi/4).^2.*sin(Theta);
hold on
surf(x,y,z);
daspect([1 1 1])
colormap('jet')
```

Physikaufgabe 160

```
title('Raumzeit von Punkt- und Randsingularität')
xlabel('$x$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$y$', 'interpreter', 'latex')
zlabel('$z$', 'interpreter', 'latex')
% axis([-2 2 -2 2 -1 1])

% Punkt- und Randsingularität überlagert
x=(R+R.*sin(Phi/4).^2.*cos(Theta)).*cos(Phi)+R.*cos(Phi/4).^2.*cos(Theta).*
cos(Phi);
y=(R+R.*sin(Phi/4).^2.*cos(Theta)).*sin(Phi)+R.*cos(Phi/4).^2.*cos(Theta).*
sin(Phi);
z=R.*sin(Phi/4).^2.*sin(Theta)+R.*cos(Phi/4).^2.*sin(Theta);
figure(4)
surf(x,y,z);
hold on
x=sqrt(2)/2*R.*sin(Phi/2).*cos(Theta).*cos(Phi);
y=sqrt(2)/2*R.*sin(Phi/2).*cos(Theta).*sin(Phi);
z=sqrt(2)/2*R.*sin(Phi/2).*sin(Theta);
surf(x,y,z);
daspect([1 1 1])
colormap('jet')
title('Punkt- und Randsingularität und Universum')
% title('Raumzeit abzüglich sichtbares Universum')
xlabel('$x$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$y$', 'interpreter', 'latex')
zlabel('$z$', 'interpreter', 'latex')
% axis([-2 2 -2 2 -1 1])

% Universum
x=sqrt(2)/2*R.*sin(Phi/2).*cos(Theta).*cos(Phi);
y=sqrt(2)/2*R.*sin(Phi/2).*cos(Theta).*sin(Phi);
z=sqrt(2)/2*R.*sin(Phi/2).*sin(Theta);
figure(5)
surf(x,y,z);
daspect([1 1 1])
colormap('jet')
title('Raumzeit des gekrümmten Universums')
xlabel('$x$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$y$', 'interpreter', 'latex')
zlabel('$z$', 'interpreter', 'latex')
% axis([-2 2 -2 2 -1 1])
```