Aufgabe: Berechnen sie die Bindungsenergie eines Schwarzen Lochs am Beispiel des Universums.

Lösung: Wir nehmen an, daß die Masse eines Schwarzen Lochs gleichmäßig auf dem Rand einer Kugelsphäre verteilt ist. Die Bindungsenergie ist genau diejenige Energie, die nötig ist, um die Massenelemente der Sphäre, die durch die Gravitation zusammengehalten werden, in eine unendliche Entfernung zu transportieren. Bindungsenergie ist also negative potentielle Energie, weil sie freigesetzt wird, wenn sich die Kugelsphäre bildet. Der Lösungsweg entspricht dem aus Aufgabe [134], mit dem Unterschied, daß hier eine andere Art der Berechnung gewählt wurde, und zwar durch Integration von Kreisringen. Unser Universum wird durch Gravitationskräfte zusammengehalten. Das rotierende Weltall ist allerdings kein beschleunigtes Bezugssystem wie unsere Galaxis, sondern ein Inertialsystem, in dem die Zentripetalkraft betragsmäßig gleich der Zentrifugalkraft ist. Wir folgen nun dem Ansatz, daß sich die Masse M eines Schwarzen Lochs auf der Oberfläche einer Kugelsphäre mit Schwarzschildradius R_S befindet. Diese Sphäre besitzt außerhalb ihres Radius das Gravitationspotential einer Punktmasse

$$\phi(r) = -\frac{GM}{r},$$

wobei G die Gravitationskonstante ist. Auf dem Rand im Abstand $r = R_S$ herrscht demnach das konstante Gravitationspotential

$$\phi(R_S) = -\frac{GM}{R_S}.$$

Die negative Ableitung des Potentials ist die Gravitationsbeschleunigung

$$g(r) = -\frac{d\phi(r)}{dr} = -\frac{GM}{r^2}$$

bzw. nach Multiplikation mit der Masse die Kraft

$$F(r) = Mg(r) = -M\frac{d\phi(r)}{dr}.$$

Mit der Oberflächendichte σ und der Fläche A folgt daraus die Masse $M = \sigma A,$ woraus sich die Gravitationskraft auf dem Schwarzschildrand ableitet:

$$F(R_S) = Mg(R_S) = -\frac{GM^2}{R_S^2}.$$

Im Innern eines Schwarzen Lochs herrschen keine Kräfte, da das Potential dort konstant ist. Das Differential der potentiellen Energie ist somit gegeben durch

$$dE_{pot} = -F(r)\,dr = M\frac{d\phi(r)}{dr}dr = Md\phi.$$

Da das Gravitationspotential auf dem Rand nicht von r und das jeweilige Flächenelement nur von θ und φ abhängt, liefert ein einzelnes Massenelement den Beitrag

$$dM = \sigma R_S^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

und das infinitesimale Potentialelement beträgt

$$d\phi = -\frac{G}{R_S}dM = -\sigma G R_S \sin d\theta d\varphi.$$

Damit lautet das Differential der potentiellen Energie

$$dE_{pot} = Md\phi = -\sigma GMR_S \sin d\theta d\varphi.$$

Setzen wir die potentielle Energie im Unendlichen gleich null, ergibt sich ein Wert von

$$E_{pot} = \int dE_{pot} = -\sigma GMR_S \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = -4\pi\sigma R_S^2 \frac{GM}{R_S} = -\frac{GM^2}{R_S} = \phi(R_S)M.$$

Mittels der Relation zwischen Schwarzschildradius und Masse, $R_S = 2GM/c^2$, besteht die potentielle Energie des Universums aus seiner hälftigen negativen Gesamtenergie, d.h.

$$E_{pot} = -\frac{1}{2}Mc^2.$$

Die Bindungsenergie des Universums ist damit diejenige negative potentielle Energie, die aufgebracht werden muß, um die Randsingularität in eine Punktsingularität zu zerlegen. Das Ergebnis ist ein kollabierendes Universum, dessen komplette Masse sich zu einem einzigen Punkt zusammengezogen hat, der deshalb zwar noch keine Rotationsenergie, aber einen gewaltigen Gravitationsdruck besitzt, um erneut in eine Randsingularität expandieren zu können. Das Weltall startet also nicht aus dem Nichts heraus, sondern mit Hilfe der äußeren Energien seines Vorgängeruniversums. Zusammen mit den Energiebeiträgen aus den Aufgaben [138], [139], [140] ergibt sich die Gesamtenergie des Universums kurz vor dem Kollaps zu

$$E = E_{pot} + E_{kin} + U = -\frac{1}{2}Mc^2 + Mc^2 + \frac{1}{2}Mc^2 = Mc^2,$$

da die volle Ausdehnung erreicht ist und das All somit seine maximale kinetische Energie besitzt. Die doppelte Bindungsenergie der Randsingularität ist also genauso groß wie die Rotationsenergie einer punktförmigen Masse gleicher Größe im Abstand R_S vom Zentrum des Universums. Punkt- und Randsingularität tauschen ihre Energie während des Urknalls komplett aus, mit dem Unterschied, daß die Energien der Randsingularität äußere Energien, die Energien der Punktsingularität dagegen innere Energien sind. Obwohl das Universum aus zwei Singularitäten besteht, enthält immer eine von beiden die volle und die andere gar keine Masse. Da die Randsingularität um die Punktsingularität rotiert, kann man die Punktsingularität im System der Randsingularität als beschleunigtes Bezugssystem aufzufassen, in welchem Scheinkräfte wirken. Daher verhält sich die neue Punktsingularität vom Rand aus gesehen nach dem Kollaps wie eine rotierende Punktmasse in einem beschleunigten Bezugssystem. Im System der neuen Punktsingularität rotiert dagegen noch rein gar nichts, weil ihre kinetische Energie noch null ist. Dafür besitzt in diesem System die innere Energie ihren Maximalwert, aber das Gravitationspotential ist verschwunden, da die Gesamtmasse sich noch im Abstand null vom Zentrum befindet, der Schwarzschildradius aber proportional zur Masse zunimmt. Die Gesamtenergie zu Beginn des neuen Universums lautet also

$$E = E_{pot} + E_{kin} + U = 0 + 0 + Mc^2 = Mc^2,$$

und die Energie blieb damit erhalten. Da der Energieübertrag keinesfalls mit Lichtgeschwindigkeit erfolgen kann, weil er ja instantan erfolgen muß, ist der Urknall nur durch Quantenteleportation erklärbar. Die quantenmechanischen Zustände beider Singularitäten müssen demnach miteinander verschränkt sein.

