Aufgabe: Begründen Sie, warum der Meeresspiegel mit zunehmender Erderwärmung exponentiell ansteigt.

Lösung: Für ein divergentes Vektorfeld gilt die Konvergenzgleichung in der Form

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0,$$

wobei ρ die Dichte ist,[1]

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

der Nabla-Operator ist und

$$\mathbf{j} = j_x \mathbf{e}_x + j_y \mathbf{e}_y + j_z \mathbf{e}_z = \rho \mathbf{v}$$

die Stromdichte mit der Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z.$$

Die Divergenz der Stromdichte erhalten wir aus dem Skalarprodukt

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(j_x \mathbf{e}_x + j_y \mathbf{e}_y + j_z \mathbf{e}_z \right) = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}.$$

Mit den Komponenten

$$j_x \equiv \rho v, \quad j_y = j_z = 0$$

vereinfacht sich die Kontinuitätsgleichung zu ihrer eindimensionalen Form

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} = 0.$$

Ist die Dichte lediglich eine Funktion der Zeit und ortsunabhängig, d.h. $\rho(x,t) = \rho(t)$, können wir sie vor das Differentialzeichen ziehen und schreiben:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Ist auch noch die Geschwindigkeit ortsunabhängig und eine alleinige Funktion der Zeit, etwa $v = at$, wobei a eine konstante Beschleunigung ist, so folgt daraus

[1] Die Kontinuitätsgleichung tritt in allen Feldtheorien der Physik auf, wobei die entsprechenden Erhaltungsgrößen nicht nur die Masse, sondern auch die elektrische Ladung, die Energie, die Wahrscheinlichkeit und einige Teilchenzahlen sein können. (Wikipedia)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho a\frac{\partial t}{\partial x}=0,$$

was mit dem totalen Zeitdifferential multipliziert den Ausdruck

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}dt+\rho a\frac{\partial t}{\partial x}dt=0$$

ergibt bzw. nach Umformung mit $dt = dx/v$ die Gleichung

$$d\rho+\frac{\rho a}{v}\frac{\partial t}{\partial x}dx=0,$$

mit der konstanten Geschwindigkeit v. Durch Trennung der Variablen erhalten wir

$$\frac{d\rho}{\rho}=-\frac{a}{v}dt.$$

Da wir die Wachstumsrate $k \equiv a/v$ als konstant angenommen haben, können wir beide Seiten der Differentialgleichung einfach integrieren. Als Lösung ergibt sich

$$\int\frac{d\rho}{\rho}=-k\int dt \quad \text{bzw.} \quad \ln\rho=-kt+C,$$

wobei C eine Integrationskonstante ist. Damit erhalten wir eine exponentielle Dichteabhängigkeit

$$\rho(t)=\rho(0)e^{-kt}.$$

Für ein konvergentes Vektorfeld, d.h. wenn etwa Wärme zugeführt wird, was beim Schmelzen der Polkappen sicher der Fall ist, wechselt das Vorzeichen von k und es gilt

$$\rho(t)=\rho(0)e^{kt},$$

mit $k>0$. Eine polaren bzw. alpinen Gletschern zugeführte Wärmemenge steigt demnach einer exponentiellen Abhängigkeit folgend an, und damit nimmt auch die Masse des schmelzenden Eises exponentiell zu. Da die Masse aber proportional zum Volumen ist und das Volumen das Produkt aus Grundfläche mal Höhe, ändert sich bei konstanter Grundfläche lediglich die Höhe bzw. die Dicke der Wasseroberflächen. Der Meeresspiegel steigt also selbst bei linearem Temperaturanstieg exponentiell mit der Zeit an,

qed

Anmerkung: Wer etwa gemeint hat, daß der Anstieg lediglich linear erfolgen würde, muß sich in seinen Annahmen geirrt haben.

