Aufgabe: Zwei Bogenschützen reiten aufeinander zu und schießen zu einer bestimmten Zeit ihre Pfeile aufeinander ab. Danach reiten sie mit unverminderter Geschwindigkeit weiter. Wann und wo trifft der Pfeil des ersten Reiters den zweiten Reiter, wann und wo der Pfeil des zweiten den ersten? Nehmen Sie an, daß die Reichweiten der abgeschossenen Pfeile größer sind als der gegenseitige Abstand der Reiter und vereinfachen Sie das Problem dadurch, daß Sie die Gravitation und den Gegenwind vernachlässigen. Wieviel Zeit verbleibt dem Überlegenen, um dem gegnerischen Geschoß auszuweichen?

Lösung: Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit sowohl Reiter als auch Pfeile als Massenpunkte an. Dann lauten die Bewegungsgleichungen des ersten und zweiten Reiters längs der x-Achse:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_0 + v_1 t \\ x_2(t) &= a - v_2 t \end{aligned}$$

Im System der sich mit konstanten Geschwindigkeiten v_1 und v_2 bewegenden Reiter haben die Pfeile die Geschwindigkeiten v_3 bzw. v_4, der gegenseitige Abstand der beiden Reiter sei a. Der Ort des ersten Reiters zur Zeit $t = 0$ sei x_0, der des zweiten gleich a. Der Zeitpunkt der Schußabgabe des ersten Reiters sei t_1, der des zweiten t_2. Zu diesen Zeitpunkten befinden sich die Reiter an den Orten

$$\begin{aligned} x_1(t_1) &= x_0 + v_1 t_1, \\ x_2(t_2) &= a - v_2 t_2. \end{aligned}$$

Damit lauten die Bewegungsgleichungen der beiden Pfeile nach erfolgter Schußabgabe:

$$\begin{aligned} x_3(t) &= x_0 + v_1 t_1 + (v_1 + v_3)(t - t_1), \\ x_4(t) &= a - v_2 t_2 - (v_2 + v_4)(t - t_2). \end{aligned}$$

Vor dem Schuß entsprechen sie denen des Reiters:

$$\begin{aligned} x_3(t) &= x_1(t), \\ x_4(t) &= x_2(t). \end{aligned}$$

Zusammenfassend gilt:

$$x_3(t) = \begin{cases} x_0 + v_1 t & \text{für} \quad t < t_1, \\ x_0 + v_1 t_1 + (v_1 + v_3)(t - t_1) & \text{für} \quad t \geq t_1, \end{cases}$$

bzw.

$$x_4(t) = \begin{cases} a - v_2 t & \text{für} \quad t < t_2, \\ a - v_2 t_2 - (v_2 + v_4)(t - t_2) & \text{für} \quad t \geq t_2. \end{cases}$$

Die Zeit t_2 kann sowohl größer als auch kleiner t_1 sein, da jeder Schütze im Prinzip zuerst schießen kann.

Der Pfeil des ersten Reiters trifft den zweiten Reiter zur Zeit t_3 am Ort

$$x_3(t_3) = x_2(t_3),$$

der Pfeil des zweiten Reiters den ersten Reiter zur Zeit t_4 am Ort

$$x_4(t_4) = x_1(t_4).$$

Nach t_3 und t_4 aufgelöst sind diese beiden Zeiten gegeben durch

$$t_3 = \frac{a - x_0 + v_3 t_1}{v_1 + v_2 + v_3},$$
$$t_4 = \frac{a - x_0 + v_4 t_2}{v_1 + v_2 + v_4}.$$

Aus Gründen der Kausalität muß $t_3 > t_1$ und $t_4 > t_2$ sein, d.h. die Schüsse müssen abgegeben werden, ehe die gegenseitige Entfernung durchritten ist, d.h. es muß gelten:

$$t_1 < \frac{a - x_0}{v_1 + v_2} \quad \text{und} \quad t_2 < \frac{a - x_0}{v_1 + v_2}.$$

Nur im Falle, daß die Schüsse zur selben Zeit abgegeben werden, d.h. wenn $t_1 = t_2$, und die Bögen gleiche Spannkraft haben, beide Pfeile also die gleiche Geschwindigkeit $v_3 = v_4$ erreichen, finden auch die Treffer zur selben Zeit statt $(t_3 = t_4)$. In allen anderen Fällen ist die Differenz

$$t_4 - t_3 = \frac{a - x_0 + v_4 t_2}{v_1 + v_2 + v_4} - \frac{a - x_0 + v_3 t_1}{v_1 + v_2 + v_3}$$

zu untersuchen. Werden die beiden Pfeile mit gleicher Geschwindigkeit zu unterschiedlichen Zeiten abgeschossen, hängt das Ergebnis davon ab, wer zuerst schießt, denn dieser trifft auch zuerst:

$$t_4 - t_3 = \frac{v_3}{v_1 + v_2 + v_3}(t_2 - t_1).$$

Im Falle $v_3 >> v_1 + v_2$ verbleibt dem, der zuerst schießt, nur etwas weniger Zeit auszuweichen, als der andere seinen Schuß später abgibt, denn

$$t_4 - t_3 \approx \left(1 - \frac{v_1 + v_2}{v_3}\right)(t_2 - t_1).$$

Werden die Pfeile hingegen zur selben Zeit $t_1 = t_2$, aber mit unterschiedlicher Spannkraft abgeschossen, so hängt das Ergebnis lediglich davon ab, wer die höhere Spannkraft hat.

$$t_4 - t_3 = \frac{a - x_0 - (v_1 + v_2)t_1}{(v_1 + v_2 + v_3)(v_1 + v_2 + v_4)}(v_3 - v_4)$$

Wenn der erste Bogenschütze einen Bogen mit höherer Spannkraft benutzt $(v_3 > v_4)$, trifft der zweite Bogenschütze später $(t_4 > t_3)$, da der Zähler $a - x_0 - (v_1 + v_2)t_1$, wie wir oben gesehen haben, größer Null ist.

Es kommt also bei dieser Art zu kämpfen primär darauf an, seine Pfeile früher zu verschicken als der Gegner und möglichst auch noch die bessere Waffe zu besitzen, denn nur dann ist die verbleibende Zeit, sich der Waffenwirkung des Gegners noch rechtzeitig entziehen zu können, und damit die Wahrscheinlichkeit, selbst zu überleben, einigermaßen hoch.