Physikaufgaben zur Entropie

Übungsaufgabe 1:

Berechnen Sie die Mischungsentropie in einem isolierten Gesamtsystem, welches aus zwei durch eine diatherme, aber mechanisch feste und undurchlässige Wand getrennten Teilsystemen besteht, nachdem die Trennwand entfernt wurde und eine Durchmischung stattgefunden hat. Jedes der beiden Teilsysteme enthalte ein ideales Gas mit dem Volumen V_i bestehend aus N_i Teilchen (i = 1, 2). Nehmen Sie an, daß sich in der Anfangssituation ein partielles Gleichgewicht A des Gesamtsystems eingestellt hat, mit der gemeinsamen Temperatur T_A.

Lösung:

Das Entfernen der Trennwand ist im allgemeinen ein spontaner, irreversibler Prozeß, der mit einer Zunahme der Gesamtentropie verbunden ist. Die Durchmischung führt in ein neues Gleichgewicht E mit der Temperatur T_E, dessen innere Energien des Anfangs- und Endzustands lauten:

$$\begin{aligned} U_A &= N_1 u_1(T_A) + N_2 u_2(T_A) \\ U_E &= N_1 u_1(T_E) + N_2 u_2(T_E) \end{aligned}$$

Weil der Durchmischungsprozeß in einem isolierten Gesamtsystem abläuft, gilt $U_A = U_E$, und zwar für beliebige Teilchenzahlen N_1, N_2. Daraus folgt $T_A = T_E$. Dies entspricht einem Durchmischungsprozeß, der in einem an einen Thermostaten gekoppelten Gesamtsystem mit der Temperatur T abläuft.

Stellen wir nunmehr die Entropiebilanz auf. Vor der Durchmischung im Anfangszustand A lautet die Gesamtentropie in den Teilsystemen

$$\begin{aligned} S_A &= N_1 s_1\left(T, \frac{V_1}{N_1}\right) + N_2 s_2\left(T, \frac{V_2}{N_2}\right) \\ &= N_1\left(s_{0,1}(T) + \ln\frac{V_1}{N_1}\right) + N_2\left(s_{0,2}(T) + \ln\frac{V_2}{N_2}\right). \end{aligned}$$

Nach der Durchmischung im Endzustand E lautet die Gesamtentropie für zwei verschiedene ideale Gase in dem Gesamtsystem:

$$\begin{aligned} S_A &= N_1 s_1\left(T, \frac{V}{N_1}\right) + N_2 s_2\left(T, \frac{V}{N_2}\right) \\ &= N_1\left(s_{0,1}(T) + \ln\frac{V}{N_1}\right) + N_2\left(s_{0,2}(T) + \ln\frac{V}{N_2}\right), \end{aligned}$$

worin $V = V_1 + V_2$ das Gesamtvolumen ist. Die Entropiedifferenz, d.h. die Mischungsentropie, lautet also:

$$\Delta S = S_E - S_A = N_1 \ln\frac{V}{V_1} + N_2 \ln\frac{V}{V_2}.$$

Da $V > V_1$ und $V > V_2$, ist $\Delta S > 0$.