Klimamodell mit Wolken

Aufgabenstellung

- Stellen Sie ein Modell für den Klimawandel auf, das so einfach wie möglich ist, aber den Einfluß der Wolken berücksichtigt.
- Beweisen Sie, daß sich die globale Temperatur stets erhöht, wenn die CO2-Konzentration in der Erdatmosphäre zunimmt.
- Wie kann erklärt werden, daß die Temperatur vorübergehend auch abnehmen kann?

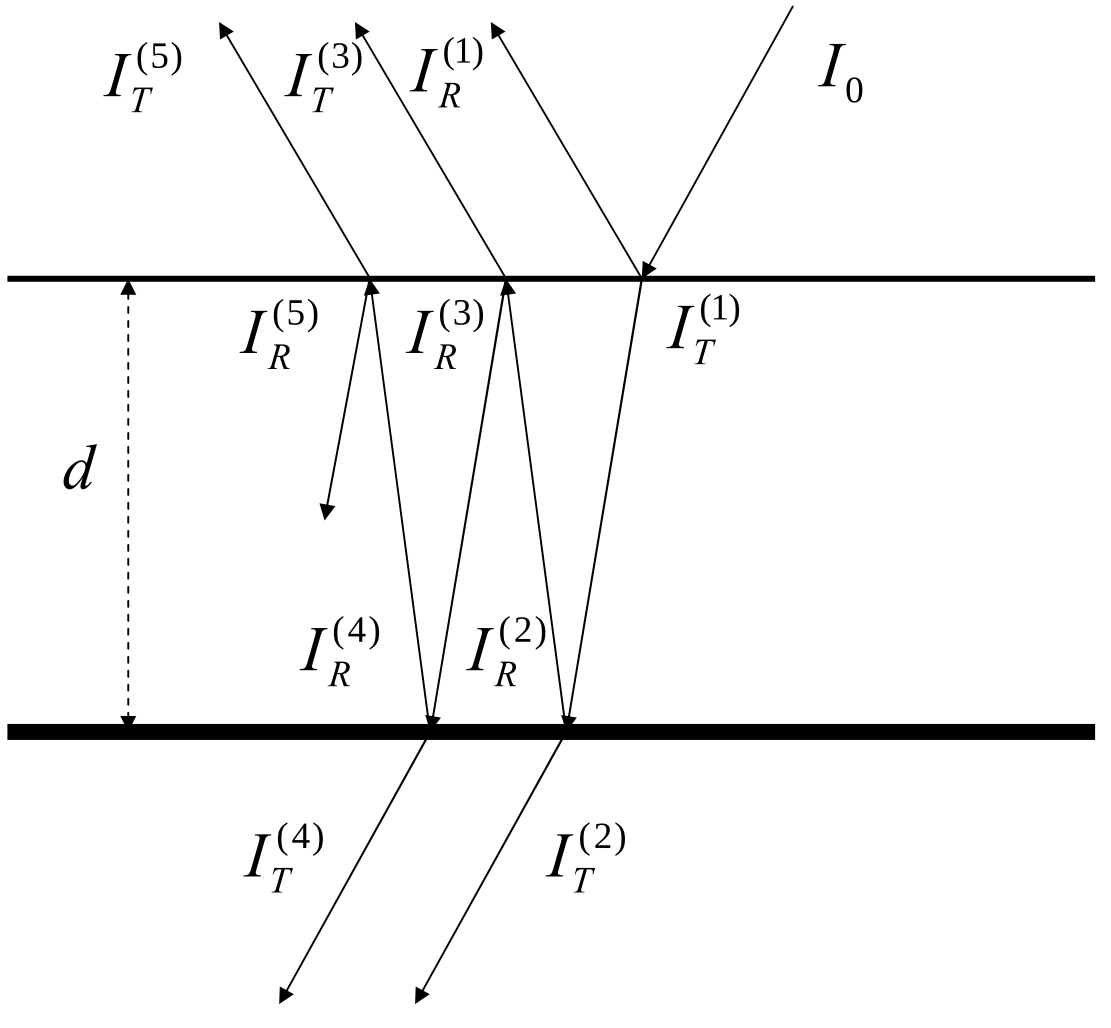
Grundannahmen

- Die Sonne ist kein veränderlicher Stern und besitzt wie vom Energieerhaltungssatz gefordert konstante Energie. Die durch Strahlung emittierte Energie ist angesichts der riesigen Sonnenmasse im Beobachtungszeitraum vernachlässigbar.
- Die von der Sonne auf die Erde eingestrahlte Energie befindet sich im Strahlungsgleichgewicht mit der von der Erde abgestrahlten Energie.
- Astronomische Ereignisse (Drehung der Erdachse, Abweichungen von der Keplerbewegung, Meteoriteneinschläge) finden im Beobachtungszeitraum nicht statt. Somit bleibt der Drehimpuls erhalten.
- Die einzigen in der Lufthülle für die Temperatur verantwortlichen und im Infraroten absorbierenden Moleküle sind Kohlendioxid, Wasserdampf und Methan.
- Die Transmission für senkrechten Einfall läßt sich in jedem Spektralband durch das Lambert-Beersche Gesetz beschreiben.

Abkürzungen

I_0	Einfallende Intensität
I_R	Reflektierte Intensität
I_T	Transmittierte Intensität
I_A	Absorbierte Intensität
R	Reflexionsvermögen
T	Transmissionsvermögen
A	Absorptionsvermögen
α	Absoerptionskoeffizient
d	Dicke der Erdatmosphäre

Mehrfachreflexionen an Grenzschichten



Grenzschicht Stratosphäre - Atmosphäre

Energiebilanz

$$I_0 = I_T^{(1)} + I_R^{(1)}$$
$$I_R^{(2)} e^{-\alpha d} = I_T^{(3)} + I_R^{(3)}$$
$$I_R^{(4)} e^{-\alpha d} = I_T^{(5)} + I_R^{(5)}$$
$$I_R^{(2n)} e^{-\alpha d} = I_T^{(2n+1)} + I_R^{(2n+1)}$$

Reflektierte Energie

$$I_R = I_R^{(1)} + I_T^{(3)} + I_T^{(5)} + \cdots + I_T^{(2n+1)}$$

Grenzschicht Atmosphäre - Erdoberfläche

Energiebilanz

$$I_T^{(1)} e^{-\alpha d} = I_T^{(2)} + I_R^{(2)}$$

$$I_R^{(3)} e^{-\alpha d} = I_T^{(4)} + I_R^{(4)}$$

$$I_R^{(5)} e^{-\alpha d} = I_T^{(6)} + I_R^{(6)}$$

$$I_R^{(2n-1)} e^{-\alpha d} = I_T^{(2n)} + I_R^{(2n)}$$

Transmittierte Energie

$$I_T = I_T^{(2)} + I_T^{(4)} + I_T^{(6)} + \cdots + I_T^{(2n)}$$

Intensitäts-Rekursionsformeln

Reflektierter Anteil

$$I_R^{(1)} = R_1 I_0 \qquad I_R^{(2)} = \left(1 - R_1\right) R_2 e^{-\alpha d} I_0$$

$$I_T^{(3)} = I_R^{(2)} e^{-\alpha d} - I_R^{(3)} = \left(1 - R_1\right) I_R^{(2)} e^{-\alpha d} = \left(1 - R_1\right)^2 R_2 I_0 e^{-2\alpha d}$$

$$I_T^{(5)} = I_R^{(4)} e^{-\alpha d} - I_R^{(5)} = \left(1 - R_1\right) I_R^{(4)} e^{-\alpha d} = \left(1 - R_1\right) I_R^{(2)} e^{-\alpha d} \left(R_1 R_2\right) e^{-2\alpha d}$$

$$I_T^{(2n+1)} = I_R^{(2n)} e^{-\alpha d} - I_R^{(2n+1)} = \left(1 - R_1\right) I_R^{(2n)} e^{-\alpha d} = \left(1 - R_1\right) I_R^{(2)} e^{-\alpha d} \left(R_1 R_2\right)^{n-1} e^{-2(n-1)\alpha d}$$

Transmittierter Anteil

$$I_T^{(2)} = I_T^{(1)} e^{-\alpha d} - I_R^{(2)} = \left(1 - R_1\right)\left(1 - R_2\right) I_0 e^{-\alpha d}$$

$$I_T^{(4)} = I_R^{(3)} e^{-\alpha d} - I_R^{(4)} = \left(1 - R_2\right) I_R^{(3)} e^{-\alpha d} = R_1 \left(1 - R_2\right) I_R^{(2)} e^{-2\alpha d}$$

$$I_T^{(6)} = I_R^{(5)} e^{-\alpha d} - I_R^{(6)} = \left(1 - R_2\right) I_R^{(5)} e^{-\alpha d} = R_1 \left(1 - R_2\right) I_R^{(2)} e^{-2\alpha d} \left(R_1 R_2\right) e^{-2\alpha d}$$

$$I_T^{(2n)} = I_R^{(2n-1)} e^{-\alpha d} - I_R^{(2n)} = \left(1 - R_2\right) I_R^{(2n-1)} e^{-\alpha d} = R_1 \left(1 - R_2\right) I_R^{(2)} e^{-2\alpha d} \left(R_1 R_2\right)^{n-2} e^{-2(n-2)\alpha d}$$

Totale reflektierte und transmittierte Energie

$$I_R = I_R^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} I_T^{(2n+1)} = I_R^{(1)} + \left(1-R_1\right) e^{-\alpha d} I_R^{(2)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(R_1 R_2\right)^{n-1} e^{-2(n-1)\alpha d}$$

$$= I_R^{(1)} + \left(1-R_1\right) e^{-\alpha d} I_R^{(2)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(R_1 R_2\right)^{n} e^{-2n\alpha d} = I_R^{(1)} + \frac{\left(1-R_1\right) e^{-\alpha d} I_R^{(2)}}{1-R_1 R_2 e^{-2\alpha d}}$$

$$= I_R^{(1)} + \frac{\left(1-R_1\right) R_2 e^{-2\alpha d} I_T^{(1)}}{1-R_1 R_2 e^{-2\alpha d}} = R_1 I_0 + \frac{\left(1-R_1\right)^2 R_2 e^{-2\alpha d} I_0}{1-R_1 R_2 e^{-2\alpha d}}$$

$$I_T = \sum_{n=1}^{\infty} I_T^{(2n)} = I_T^{(2)} + \left(1-R_2\right) e^{-\alpha d} \sum_{n=2}^{\infty} I_R^{(2n-1)} = I_T^{(2)} + R_1 \left(1-R_2\right) e^{-2\alpha d} I_R^{(2)} \sum_{n=2}^{\infty} \left(R_1 R_2\right)^{n-2} e^{-2(n-2)\alpha d}$$

$$= I_T^{(2)} + R_1 \left(1-R_2\right) e^{-2\alpha d} I_R^{(2)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(R_1 R_2\right)^{n} e^{-2n\alpha d} = I_T^{(2)} + \frac{R_1 \left(1-R_2\right) e^{-2\alpha d} I_R^{(2)}}{1-R_1 R_2 e^{-2\alpha d}}$$

$$= \left(1-R_1\right)\left(1-R_2\right) e^{-\alpha d} I_0 \left(1 + \frac{R_1 R_2 e^{-2\alpha d}}{1-R_1 R_2 e^{-2\alpha d}} \right) = \frac{\left(1-R_1\right)\left(1-R_2\right) e^{-\alpha d} I_0}{1-R_1 R_2 e^{-2\alpha d}}$$

Strahlungsgleichgewicht

$$I_0 = I_T + I_A + I_R = \tilde{I}_T + \tilde{I}_A + \tilde{I}_R = \mathrm{const}$$

$$I_T = \frac{(1-R_1)(1-R_2)e^{-\alpha d}}{1-R_1R_2e^{-2\alpha d}} I_0$$

$$I_R = R_1 I_0 + \frac{(1-R_1)^2 R_2 e^{-2\alpha d}}{1-R_1R_2e^{-2\alpha d}} I_0$$

$$\tilde{A} - A = T - \tilde{T} + R - \tilde{R} = \frac{(1-R_1)(1-R_2)e^{-\alpha d}}{1-R_1R_2e^{-2\alpha d}} - \frac{(1-R_1)(1-R_2)e^{-\tilde{\alpha} d}}{1-R_1R_2e^{-2\tilde{\alpha} d}}$$
$$+ \frac{(1-R_1)^2 R_2 e^{-2\alpha d}}{1-R_1R_2e^{-2\alpha d}} - \frac{(1-R_1)^2 R_2 e^{-2\tilde{\alpha} d}}{1-R_1R_2e^{-2\tilde{\alpha} d}}$$

Exakter Beweis für die Absorptionszunahme

$$\tilde{A} - A = \frac{\left[1 - R_2 + (1 - R_1) R_2 e^{-\alpha d}\right](1 - R_1) e^{-\alpha d}\left(1 - R_1 R_2 e^{-2\tilde{\alpha} d}\right)}{\left(1 - R_1 R_2 e^{-2\alpha d}\right)\left(1 - R_1 R_2 e^{-2\tilde{\alpha} d}\right)} - \frac{\left[1 - R_2 + (1 - R_1) R_2 e^{-\tilde{\alpha} d}\right](1 - R_1) e^{-\tilde{\alpha} d}\left(1 - R_1 R_2 e^{-2\alpha d}\right)}{\left(1 - R_1 R_2 e^{-2\alpha d}\right)\left(1 - R_1 R_2 e^{-2\tilde{\alpha} d}\right)}$$

$$\tilde{A} - A > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[1 - R_2 + (1 - R_1) R_2 e^{-\alpha d}\right] e^{-\alpha d}\left(1 - R_1 R_2 e^{-2\tilde{\alpha} d}\right) > \left[1 - R_2 + (1 - R_1) R_2 e^{-\tilde{\alpha} d}\right] e^{-\tilde{\alpha} d}\left(1 - R_1 R_2 e^{-2\alpha d}\right)$$

$$\frac{1 - R_2 + (1 - R_1) R_2 e^{-\alpha d}}{1 - R_2 + (1 - R_1) R_2 e^{-\tilde{\alpha} d}} \, \frac{e^{-\alpha d}}{e^{-\tilde{\alpha} d}} \, \frac{1 - R_1 R_2 e^{-2\tilde{\alpha} d}}{1 - R_1 R_2 e^{-2\alpha d}} > 1 \quad \text{für} \quad \tilde{\alpha} > \alpha$$

Näherungslösung der atmosphärischen Absorption

$$A = 1 - T - R = \frac{(1-R_1)\left(1-e^{-\alpha d}\right)\left(1+R_2 e^{-\alpha d}\right)}{1-R_1 R_2 e^{-2\alpha d}}$$

$$\approx \frac{(1-R_1)\alpha d\left(1+R_2(1-\alpha d)\right)}{1-R_1R_2(1-2\alpha d)} = \frac{(1-R_1)(1+R_2-R_2\alpha d)}{1-R_1R_2+2R_1R_2\alpha d}\alpha d$$

$$A(\alpha) = \frac{(1-R_1)(1+R_2)}{1-R_1R_2}\frac{1-\frac{R_2}{1+R_2}\alpha d}{1+\frac{2R_1R_2}{1-R_1R_2}\alpha d}\alpha d$$

$$A(x) \equiv \frac{1-ax}{1+cx}bx$$

$$x \equiv \alpha d \qquad a = \frac{R_2}{1+R_2} \qquad b = \frac{(1-R_1)(1+R_2)}{1-R_1R_2} \qquad c = \frac{2R_1R_2}{1-R_1R_2}$$

Erhöhung der CO_2-Konzentration

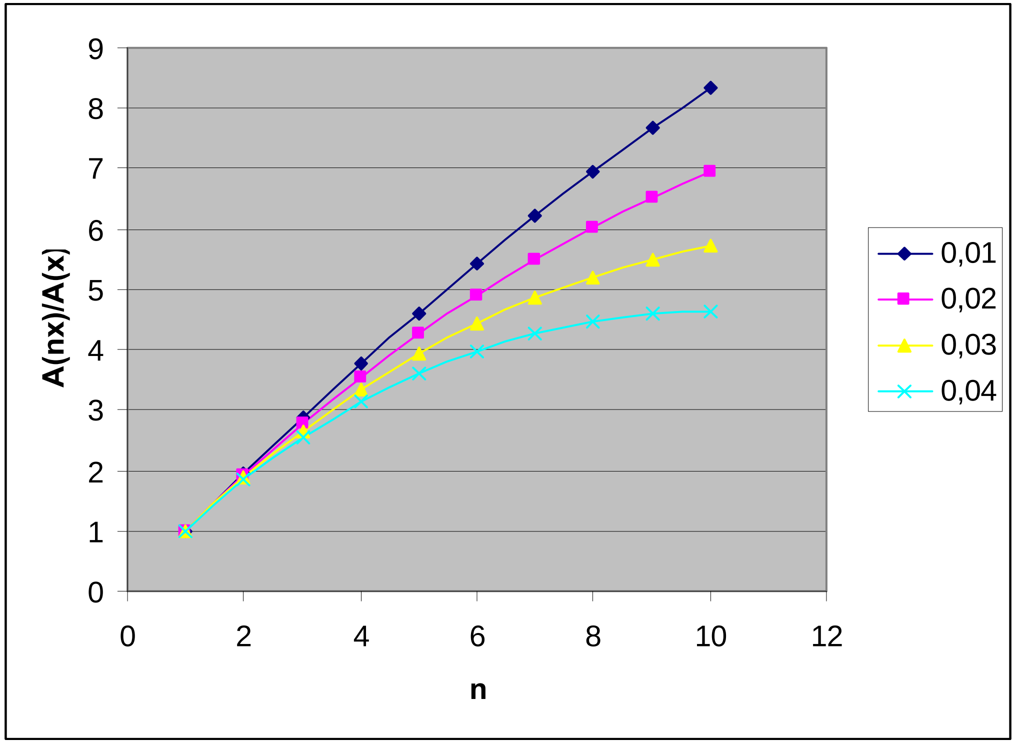
$$A(nx) = n \frac{1-nax}{1-ax} \frac{1+cx}{1+ncx} A(x) < nA(x)$$

Eine Verdopplung der Konzentration führt zu

$$A(2x) = 2 \frac{1-2ax}{1-ax} \frac{1+cx}{1+2cx} A(x) < 2A(x)$$

usw.

Anstieg der atmosphärischen Absorption bei Vervielfachung der CO_2-Konzentration



Spezialfall a = c, x wurde parametrisiert (siehe Legende)

Ergebnisse

- Die in Form von Wärme absorbierte Energie kann in andere Energieformen, z.B. in kinetische Energie des Windes (Starkwind, Sturm) oder (bei Anwesenheit von Wolken) in kinetische Energie von Niederschlägen umgewandelt werden (stärkere Regenfälle mit mehr bzw. größeren Regentropfen). In Abwesenheit von Wolken führt die Wärmeenergie vermehrt zu Hitzeperioden oder steigender Trockenheit.
- Ein vorübergehender Temperaturrückgang ist dennoch möglich, wenn parallel zu den CO2-Emissionen die Konzentration der sogenannten Aerosole in der Atmosphäre (ähnlich wie bei einem Vulkanausbruch) zunimmt. Dies sind Teilchen unterschiedlicher Größe, welche die Strahlungsintensität dadurch abschwächen, daß das Licht an ihnen verstärkt gestreut wird, was etwa den gleichen Effekt hat wie das Filtern der einfallenden Sonnenstrahlung.
- Eine gleichzeitige Zunahme der Wasserdampfkonzentration und damit der -absorption verstärkt den Treibhauseffekt noch, da das Reflexionsvermögen des Wasserdampfs primär eine Materialkonstante ist.
- Eine weitere Einflußgröße ist die verstärkte Wolkenbildung. Zur Verdunstung größerer Wolkenmassen ist mehr Energie erforderlich, die den unteren Luftschichten entnommen wird. Dadurch kann es kälter werden, bis sich eine geschlossene Wolkendecke gebildet hat. Erst wenn die Atmosphäre mit Wasserdampf gesättigt ist, setzt auch in den unteren Luftschichten die Erwärmung ein.