

# Mathematikaufgabe 98

[Home](#) | [Startseite](#) | [Impressum](#) | [Kontakt](#) | [Gästebuch](#)

**Aufgabe:** Ein neuronales Netz mit 5 Eingangs- und einem Ausgangsneuron soll nur dann einen gültigen Ausgangswert liefern, wenn das fünfte Eingangsneuron eine logische UND-Verknüpfung der vier ersten Eingangsneuronen darstellt. Wie viele Trainingsmuster müssen Sie mindestens trainieren, um für alle 32 möglichen Kombinationen das richtige Ergebnis zu bekommen?

**Lösung:** Wir nehmen die Antwort vorweg und erklären warum. Da die fünfte Variable von den vier anderen abhängt, haben wir lediglich ein Gleichungssystem von 4 Gleichungen mit vier Unbekannten zu lösen. Es müssen also mindestens 4 Muster trainiert werden, um dieses reduzierte Gleichungssystem lösen zu können. Betrachten wir zunächst Abb. 1.

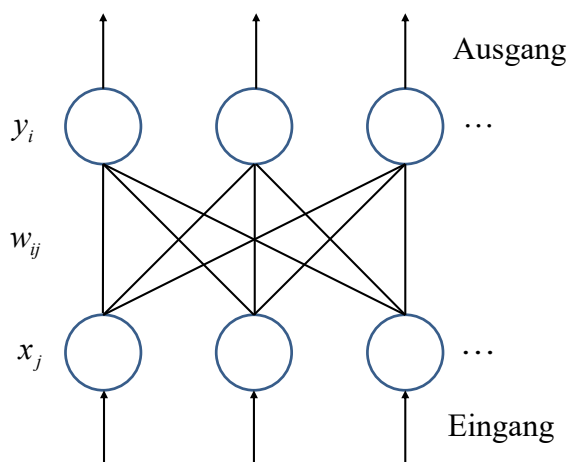
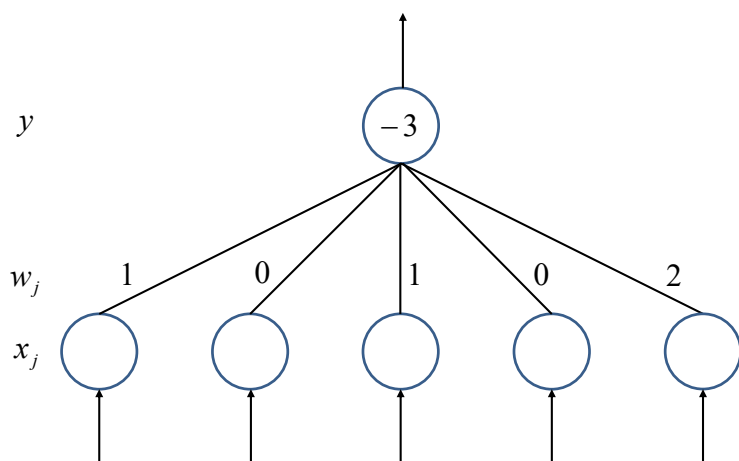


Abbildung 1. Allgemeines neuronales Netz mit zwei Schichten

Zwischen den Eingangs- und Ausgangsneuronen muß zur Trennung der Klassen die Beziehung

$$y_i - s_i = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{x})_i = \sum_{j=0}^n w_{ij} x_j = w_{i0} x_0 + w_{i1} x_1 + w_{i2} x_2 + \dots + w_{in} x_n = 0$$

erfüllt sein, wobei  $s_i$  die Schwelle ist, oberhalb der das Neuron feuert. Reduzieren wir das Problem auf ein einzelnes Ausgangsneuron wie in Abb. 2,



# Mathematikaufgabe 98

Abbildung 2. Spezialfall eines neuronalen Netzwerks mit 5 Eingangsneuronen und einem Ausgangsneuron

so haben wir die Relation

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} = w_0 x_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 + w_4 x_4 + w_5 x_5$$

abzuschätzen. Mit nur vier Testmustern gemäß Tab. 1 erhalten wir die Gewichte

$$(w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) = (-3, 1, 0, 1, 0, 2)$$

und daraus die Bestimmungsgleichung für sämtliche neuronale Muster:

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} = -3 + x_1 + x_3 + 2x_5.$$

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}$	$y$
0	0	0	0	0	-3	0
0	1	0	1	0	-3	0
1	0	1	0	0	-1	0
1	1	1	1	1	1	1

Tabelle 1. Vier beliebig herausgegriffene Trainingsmuster zur Bestimmung der Netzgewichte

Mit diesen Gewichten lassen sich also alle Kombinationen an neuronalen Mustern eindeutig und fehlerfrei bestimmen, wie Tab. 2 explizit belegt.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}$	$y$
0	0	0	0	0	-3	0
0	0	0	1	0	-3	0
0	0	1	0	0	-2	0
0	0	1	1	0	-2	0
0	1	0	0	0	-3	0
0	1	0	1	0	-3	0
0	1	1	0	0	-2	0
0	1	1	1	0	-2	0
1	0	0	0	0	-2	0
1	0	0	1	0	-2	0
1	0	1	0	0	-1	0
1	0	1	1	0	-1	0
1	1	0	0	0	-2	0
1	1	0	1	0	-2	0
1	1	1	0	0	-1	0
1	1	1	1	1	1	1

Tabelle 2. Sämtliche erlaubten Kombinationen aller 5 Neuronen führen zum richtigen Ergebnis

## Mathematikaufgabe 98

---

Im Anschluß ist das Ergebnis des Trainingslaufs zur Gewichtsbestimmung in MATLAB-Code angegeben.

```
>> who
```

```
Your variables are:
```

```
T4      T4_errors  T4_outputs  T4_outputsSim  p      t
```

```
>> p
```

```
p =
```

```
 0  0  1  1
 0  1  0  1
 0  0  1  1
 0  1  0  1
 0  0  0  1
```

```
>> t
```

```
t =
```

```
 0  0  0  1
```

```
>> T4_outputs
```

```
T4_outputs =
```

```
 0  0  0  1
```

```
>> T4_outputsSim
```

```
T4_outputsSim =
```

```
 0  0  0  1
```

```
>> T4_errors
```

```
T4_errors =
```

```
 0  0  0  0
```

```
>> T4.iw{1,1}
```

```
ans =
```

```
 1  0  1  0  2
```

```
>> T4.b{1}
```

```
ans =
```

```
-3
```