Mathematikaufgabe 96

Aufgabe: Finden Sie den richtigen Kreis.

Lösung: Diese Aufgabenstellung kann nur mit Hilfe eines neuronalen Netzes gelöst werden. Die allgemeine Kreisgleichung lautet

$$(x-x_0)^2+(x-x_0)^2=R^2,$$

wobei die einzigen Unbekannten aus der Menge aller Kreise der Kreismittelpunkt $(x_0,\, y_0)$ und der Radius R sind. Der gesuchte Kreis muß einen ganz bestimmten Radius haben, daher können wir diesen als konstanten Parameter betrachten. Auch hat der richtige Kreis nur einen festen Kreismittelpunkt, der ebenfalls nicht variieren kann. Zwei gleiche Kreise, die aufeinander liegen, zählen daher wie ein Kreis. Da es keine zwei Kreise mit gleichem Kreisradius, aber unterschiedlichen Kreismittelpunkten geben kann, können nur zwei unterschiedlich große Kreise gleiche x-Koordinaten bzgl. ihrer Mittelpunkte haben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit legen wir vier unterschiedliche Kreise zugrunde, womit sich die Darstellung in Abb. 1 ergibt.

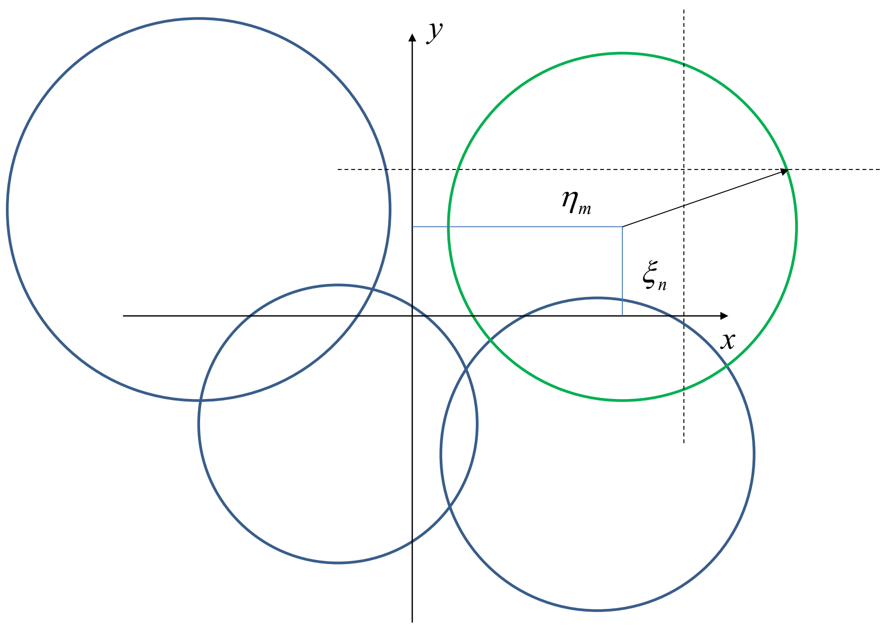

Abbildung 1. Mehrere über die Zeichenebene verteilte, unterschiedlich große Kreise

Jeder Kreis läßt sich als Konturlinie einer Fläche

$$f(x,y)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-R^2$$

darstellen, deren partielle Ableitungen durch

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2(x-x_0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=2(y-y_0)$$

gegeben sind. An der Stelle $x=x_0$ und $y=y_0$ hat die Funktion f ein relatives Minimum, wie die zweiten partiellen Ableitungen

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

beweisen. Lassen wir nun noch alle möglichen Radien und Mittelpunkte zu, so haben wir eine fünfdimensionale Hyperfläche, auf der sich der richtige Kreis im Schnittpunkt der Funktion f mit der Ebene $z = 0$ befindet.

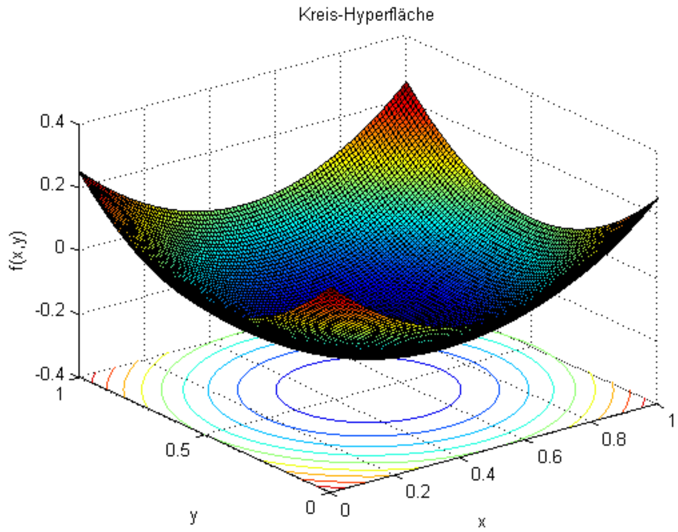

Abbildung 2. Der Kreis als Schnittmenge eines Rotationsparaboloids mit der x-y-Ebene

Aufgabe des neuronalen Netzes ist es nun, diese Konturlinie zu finden. Dazu verfahren wir wie folgt: Jede Kreisgleichung hat die beiden Lösungen

$$y_{1,2} = y_0 \pm \sqrt{R^2 - (x_{1,2} - x_0)^2}.$$

Für $x_1 = x_2$ definieren wir den Abstand der beiden Lösungen auf der y-Achse zu

$$\eta \equiv y_1 - y_2 = 2\sqrt{R^2 - (x_1 - x_0)^2}.$$

Mittels der Definition $\xi \equiv x_1 - x_0$ gilt dann $\eta = 2\sqrt{R^2 - \xi^2}$. Die Ableitung von η nach ξ lautet

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{2\xi}{\sqrt{R^2 - \xi^2}}$$

und verschwindet für $\xi = 0$ bzw. $x_1 = x_0$. Dort liegt wegen

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{2(1 + \xi^2)}{\sqrt{R^2 - \xi^2}} < 0$$

für $\xi = 0$ ein relatives Maximum. Im folgenden gehen wir zur Suche des Maximums schrittweise vor. Sei n der Iterationsschritt in x-Richtung und ξ_n der Ort des Abstandsmaximums auf der y-Achse. Wenn also $(\xi_{n-1} \leq \xi_n) \wedge (\xi_n > \xi_{n+1})$ und $(\eta_{m-1} \leq \eta_m) \wedge (\eta_m > \eta_{m+1})$ wahre Aussagen sind und wenn $\xi_n = \eta_m$ ebenfalls eine wahre Aussage ist, dann liegt dort der Kreismittelpunkt (x_0, y_0). Dabei ist m der Iterationsschritt in y- bzw. in Zeilenrichtung, der nicht notwendigerweise mit dem in x-Richtung übereinstimmen muß. Gemäß Tab. 1 müssen 5 Aussagen zutreffen, damit der Kreis identifiziert werden kann.

$\xi_{n-1} \leq \xi_n$	$\xi_n > \xi_{n+1}$	$\wedge$	$\eta_{m-1} \leq \eta_m$	$\eta_m > \eta_{m+1}$	$\wedge$	$\xi_n = \eta_m$
0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Tabelle 1. Wahrheitstabelle neuronaler Kombinationen zur Extremalwertbestimmung

Das setzt voraus, daß der wahre Kreis mit Radius R trainiert wurde. Bisher wurde nur ein Verfahren zur Erkennung eines Kreises beschrieben. Die Methode kann aber unschwer auf mehrere Kreise erweitert werden. Im allgemeinen Fall hat jeder Kreis zwei Extremwerte

$$\begin{aligned} y_{2i-1} &= y_{0i} + R_i, \\ y_{2i} &= y_{0i} - R_i \end{aligned}$$

für $i = 1, 2, \ldots$ Selbiges gilt auch für die Umkehrfunktion

$$\begin{aligned} x_{2j-1} &= x_{0j} + R_j, \\ x_{2j} &= x_{0j} - R_j \end{aligned}$$

für $j = 1, 2, \ldots$ Nehmen wir im folgenden zwei Kreise mit gleicher x-Koordinate bzgl. des Kreismittelpunkts an. Dann führen die Gleichungen

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &= 2R_1, \\ y_1 - y_3 &= y_{01} - y_{02} + R_1 - R_2, \\ y_1 - y_4 &= y_{01} - y_{02} + R_1 + R_2 \end{aligned}$$

auf ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem von drei Gleichungen mit drei Unbekannten. Die Lösungen lauten

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{y_1 - y_2}{2}, \\ R_2 &= -\frac{y_1 - y_3}{2} + \frac{y_1 - y_4}{2}, \\ y_{01} - y_{02} &= y_1 - y_4 - R_1 - R_2. \end{aligned}$$

Die Kreise können entweder auseinander liegen oder überlappen oder ineinander enthalten sein. Bei überlappenden Kreisen ist $y_1 - y_3$ oder $y_2 - y_4$ der kleinste Abstand, bei nicht überlappenden $y_1 - y_2$ oder $y_3 - y_4$. Wenn $y_1 - y_4 > 4R_2$ oder $y_1 - y_4 > 4R_1$, je nachdem, ob $R_1 < R_2$ oder $R_2 < R_1$, dann überlappen die beiden Kreise nicht.

Ein schwarzer Kreis auf einer weißen Hintergrundfläche ist nichts anderes als eine Abbildung binärer Funktionswerte, die bei genügend feiner Rasterung jedem Rasterelement den Wert 1 oder 0 zuordnet. Unterteilen wir daher unsere Zeichenfläche in hinreichend kleine Flächenelemente und scannen jeweils eine Gerade parallel zur *x*- und zur *y*-Achse von $-\infty$ kommend bis $+\infty$, so scheiden diese Geraden die Kreise der Reihe nach in einem oder mehreren Punkten. Wenn nun ein Punkt eines Kreises in eines dieser Flächenelemente fällt, so werde diesem Flächenelement der Wert 1 zugeordnet, andernfalls der Wert 0. Das entspricht bei einem natürlichen neuronalen Netz dem Überschreiten eines Schwellwerts, der das entsprechende Neuron zum Feuern bringt. Schneidet eine Gerade den Kreis nur in einem Punkt, so ist mit dieser Information noch nicht viel anzufangen. Erst wenn mindestens 2 Punkte des Kreises von der Geraden geschnitten werden, läßt sich ein Abstand zwischen diesen Punkten definieren. Je größer dieser Abstand wird, desto mehr nähern wir uns dem Kreismittelpunkt. Haben wir diesen überschritten, nimmt der Abstand wieder ab. Betrachten wir nun jeweils drei Intervalle hintereinander und nimmt der Abstand vom ersten zum zweiten noch zu, vom zweiten zum dritten jedoch wieder ab, so befinden wir uns offenbar genau im Maximum des Kreisdurchmessers, und genau in diesem Maximum sollen beide Neuronen feuern. Da die Scanbewegung in zwei voneinander unabhängigen Raumrichtungen durchgeführt wird, werden die Extremwerte in der Regel zu unterschiedlichen Zeiten erreicht. Diese Zeit spielt dabei aber keine Rolle, wenn wir uns die jeweilige Zeilen- oder Spaltennummer, die zu einem Abstandsmaximum gehört, merken. Nun müssen wir nach dem vollständigen Abscannen der Zeichenfläche nur noch gleich große Abstände in beiden Raumachsen einander zuordnen, damit das Ausgangsneuron feuern und die Kreise jeweils identifizieren kann. Unter allen gefundenen Kreisen befinden sich keine zwei gleichen, daher bleibt nur noch der Vergleich mit dem trainierten Kreis als letzter Schritt, damit die Aufgabe abgeschlossen werden kann. Damit ist der richtige Kreis gefunden, denn das neuronale Netz löst diese Aufgabenstellung für uns anhand der abgespeicherten Gewichte.

Wir haben das Beispiel des Kreises gewählt, weil dieses besonders anschaulich zeigt, welchem Prinzip neuronale Netze gehorchen. Jeder Variablen einer mathematischen Gleichung ist im Hyperraum eine eigene Koordinatenachse zugeordnet. Beim Kreis sind das die zwei Dimensionen *x* und *y*. Daher ist der zweidimensionale Raum besonders anschaulich. Wir zerlegen die zweidimensionale Arbeitsfläche nun in lauter kleine indizierte Flächenelemente $\Delta x_n \Delta y_m$ und lassen die beiden Laufindizes über ihren gesamten Wertebereich in beiden Raumrichtungen laufen. Dann definieren wir den Kreis als binäre Abbildung mit folgenden Werten:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad y = y_0 \pm \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} \quad \text{für} \quad x \in [x_n, x_{n+1}[, \; y \in [y_m, y_{m+1}[\\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe des neuronalen Netzes ist es nun, diejenigen Flächenelemente zu erkennen, die mit dem Kreis eine Schnittmenge haben. Anschließend können die als wahr erkannten Elemente beliebig weiterverarbeitet werden. In einem natürlichen neuronalen Netz hätte jedes dieser Flächenelemente sprich Rezeptoren einen eigenen Prozessor, und die binären Informationen könnten parallel ausgelesen werden. Mit einem seriell arbeitenden Rechner ist diese parallele Verarbeitung zwar in relativ kurzer Zeit möglich, aber nicht wirklich zur gleichen Zeit, wie die Natur das kann. Wir können die benötigte Information mit einem herkömmlichen PC nur spalten- oder zeilenweise auslesen und müssen sie dann aber als „gleichzeitig" deklarieren. Die Natur ist uns hierin deutlich überlegen. Künstliche neuronale Netze sind nur so gut wie die maximale Auswertegeschwindigkeit des Rechners. Je kompliziertere Gleichungen wir neuronal untersuchen wollen, in desto höhere Dimensionen steigen wir ein und desto unanschaulicher und zeitaufwendiger wird unser Problem. Aber ein Ergebnis bekommen wir nur, wenn wir in möglichst kurzer Zeit den Hyperraum vollständig durchsucht und dabei die „wahren" Zellen herausgefunden haben. Die Neuronen feuern im Idealfall alle gleichzeitig, bei unserem PC ist das natürlich nicht so. Im Grunde genommen besteht jeder Kreis

$$(x-x_0)^2+(x-x_0)^2=R^2$$

aus 5 Unbekannten: $x, y,\ x_0,\ y_0$ und R. Für vergleichende Betrachtungen können wir die Zahl der Dimensionen schlagartig um 2 reduzieren, wenn wir gedanklich eine Translation durchführen, die den Kreismittelpunkt auf den Koordinatenursprung abbildet. Dann ergeben sich für unsere Aufgabenstellung die Verhältnisse wie in Abb. 3.:

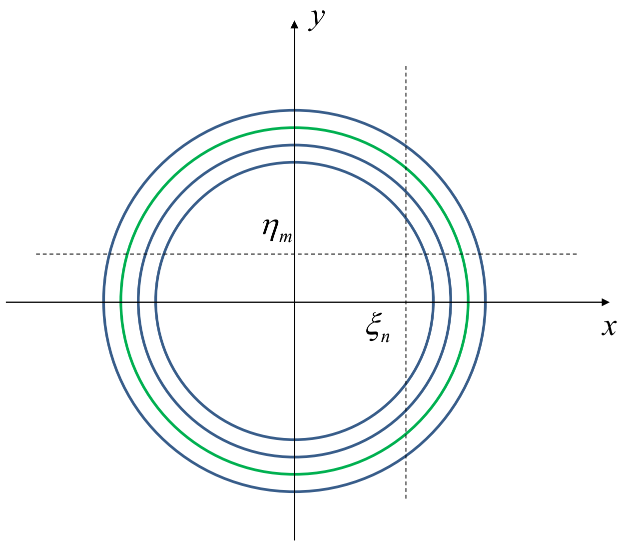

Abbildung 3. Alle Kreise der Abbildung 1 lassen sich durch eine Translation in den Ursprung abbilden

Unser Gehirn sieht die unterschiedlichen Kreise tatsächlich gleichzeitig und kann sie imaginär übereinander projizieren. Und noch eine Vereinfachung ist möglich. Da unser Gehirn auch Symmetrieüberlegungen durchführt, wird die zu lösende Aufgabenstellung schließlich eindimensional, da wir nur noch die positive x-Achse scannen müssen. Damit beschränkt sich die Suche auf die Lösung der Gleichung $x-R=0$. Der Radius R ist in unserem Gehirn als Trainingswert abgelegt und braucht nur mit x verglichen zu werden. Damit wäre der richtige Kreis auf noch viel einfachere Weise gefunden, dadurch daß wir uns auf wesentliche Vereinfachungen beschränken konnten. Geeignete Translationen und Symmetrieüberlegungen vereinfachen ein Problem meist ganz gehörig. Der allgemeine Fall bleibt indessen kompliziert, und nur um diesen geht es letztlich.

Nachfolgend wird die Aufgabenstellung mit Hilfe des MATLAB Tools gelöst. In Abb. 4 finden wir eine symbolische Abbildung des von uns gewählten Netzes.[1]

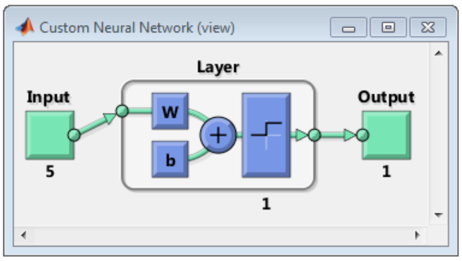

Abbildung 4. Einfaches neuronales Netz zur Bestimmung der Kreisform einer geschlossenen Kurve

Die Ergebnisse können wir im Editor ausdrucken lassen. Die Variablen kreis.iw{1,1} und kreis.b{1} geben dabei die Gewichte und den Offset des neuronalen Netzes an. Die Variable *p* beschreibt den Eingangsvektor, *t* gibt den Zielvektor an. Die realen Ergebnisse finden wir unter kreis_outputs und den Fehler unter kreis_errors.

```
>> who

Your variables are:

ans        kreis       kreis_errors   kreis_outputs  p          t

>> p
p =
    0    0    1    1
    0    1    0    1
    0    0    1    1
    0    1    0    1
    0    0    0    1

>> t
t =
    0    0    0    1

>> kreis_outputs
kreis_outputs =
    0    0    0    1
```

[1] Bei mehreren Kreisen brauchen wir anstelle von 5 Eingangsneuronen 6 an der Zahl, um alle Kreisdurchmesser miteinander vergleichen zu können.


```
>> kreis_errors
kreis_errors =
     0     0     0     0

>> kreis.iw{1,1}
ans =
     1     0     1     0     2

>> kreis.b{1}
ans =
    -3
```

