Aufgabe: Leiten Sie die Hyperfläche des schiefen Wurfs her und untersuchen Sie die Extremwerte dieser Funktion. Welche Rolle spielt eine solche Hyperfläche in einem natürlichen neuronalen Netz?

Lösung: Der Mensch bedarf einiger Übung, bis er zielsicher trifft. Erleichternd kommt hinzu, daß es beim Wurf aus der freien Hand keines Haltepunkts wie etwa bei einem Gewehr bedarf. Betrachten wir zunächst die Geometrie des schiefen Wurfs in Abbildung 1. Dabei ist φ der Azimut- und δ der Elevationswinkel. Die Zielscheibe befinde sich im Abstand d vom Nullpunkt des Koordinatensystems, dessen z-Achse koaxial zur Mitte der Zielscheibe ist.

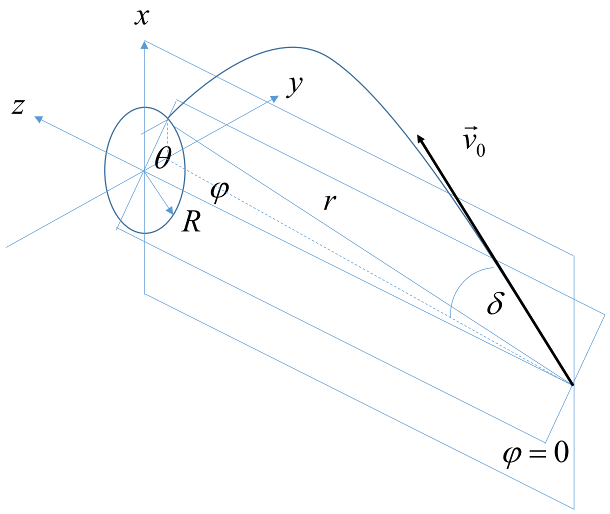

Abbildung 1. Geometrie des schiefen Wurfs auf eine kreisförmige Zielscheibe

Mittels der beiden Winkel θ und φ hat ein beliebiger Punkt in diesem System die Koordinaten

$$\rho = z\tan\theta, \quad y = z\tan\varphi, \quad x = z\sqrt{\tan^2\theta - \tan^2\varphi}.$$

Der Abstand vom Koordinatenursprung zu diesem Punkt ist dabei gegeben durch

$$r(\theta) = \frac{z}{\cos\theta} = z\sqrt{1+\tan^2\theta}, \quad \text{wobei} \quad \theta = \arctan\frac{\rho}{z} = \arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}.$$

Als Bedingung für einen Treffer kann die Beziehung

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \le R \quad \Leftrightarrow \quad \theta \le \arctan\frac{R}{d}$$

gewertet werden. Die allgemeinen Bewegungsgleichungen in einem Kraftfeld mit der Beschleunigung g parallel zur x-Achse lauten:

$$\begin{aligned} y(t) &= v_0\cos\delta\sin\varphi\cdot t, \\ z(t) &= v_0\cos\delta\cos\varphi\cdot t, \\ x(t) &= v_0\sin\delta\cdot t - \frac{1}{2}gt^2. \end{aligned}$$

Fassen wir die beiden ersten Bewegungsgleichungen zusammen und lösen das Ergebnis nach der Zeit t auf, so folgt

$$t = \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{v_0 \cos\delta} = z\frac{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}{v_0 \cos\delta}.$$

Damit nimmt die dritte Bewegungsgleichung die Form

$$x(z,\delta,\varphi) = z\tan\delta\sqrt{1+\tan^2\varphi} - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2\cos^2\delta}z^2\left(1+\tan^2\varphi\right)$$

an, wobei der feste Parameter v_0 die Geschwindigkeit ist. Auf der Zielscheibe, d.h. in der Ebene $z = d$, gilt

$$x(\delta,\varphi) = d\tan\delta\sqrt{1+\tan^2\varphi} - \frac{1}{2}\frac{gd^2}{v_0^2\cos^2\delta}\left(1+\tan^2\varphi\right).$$

Mittels

$$y^2 + z^2 = d^2\left(1+\tan^2\varphi\right)$$

folgt für den radialen Abstand $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ der Ausdruck

$$r(\varphi,\delta) = d\sqrt{1+\tan^2\varphi}\sqrt{1+\tan^2\delta\left[1 - \frac{gd}{v_0^2\sin 2\delta}\sqrt{1+\tan^2\varphi}\right]^2}.$$

Diese Gleichung ist in Abbildung 2 für $v_0^2 = gd$ graphisch dargestellt.

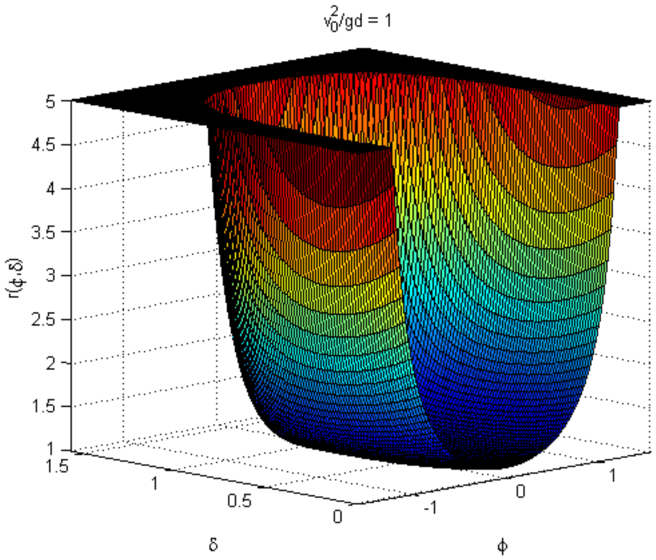

Abbildung 2. Hyperfläche der radialen Abstandsfunktion in Abhängigkeit von Azimut und Elevation

An der Stelle $\varphi = 0$ gilt dür die partielle Abhängigkeit von δ die Gleichung

$$r(\delta) = d\sqrt{1 + \left[\tan\delta - \frac{1}{2}\frac{gd}{v_0^2}\left(1 + \tan^2\delta\right)\right]^2},$$

und für $\delta = 0$ folgt für die partielle Abhängigkeit von φ der Ausdruck

$$r(\varphi) = d\sqrt{1 + \tan^2\varphi}\sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{gd}{v_0^2}\right)^2\left(1 + \tan^2\varphi\right)}.$$

Lösen wir zunächst den Fall $g = 0$ ohne Erdbeschleunigung. Die Bewegungsgleichungen sind in diesem Fall gegeben durch

$$\begin{aligned} y(t) &= v_0 \cos\delta \sin\theta_y \cdot t, \\ z(t) &= v_0 \cos\delta \cos\theta_y \cdot t, \\ x(t) &= v_0 \sin\delta \cdot t. \end{aligned}$$

Mit

$$t = z\frac{\sqrt{1 + \tan^2\varphi}}{v_0 \cos\delta}$$

folgt $x = v_0 \sin\delta \cdot t = z\tan\delta\sqrt{1 + \tan^2\varphi}.$ Quadriert ergibt sich aus

$$x^2 = z^2\tan^2\delta\left(1 + \tan^2\varphi\right) \quad \text{und} \quad y^2 + z^2 = z^2\left(1 + \tan^2\varphi\right)$$

die Relation

$$r(z, \varphi, \delta) = z\sqrt{\left(1 + \tan^2\delta\right)\left(1 + \tan^2\varphi\right)}.$$

Halten wir den Abstand $z = d$ konstant, so daß wir uns auf relative Größen beschränken können, so erhalten wir eine Funktion

$$r(\varphi, \delta) = d\sqrt{\left(1 + \tan^2\delta\right)\left(1 + \tan^2\varphi\right)},$$

die nur von zwei Variablen φ und δ abhängt. Sie weist, wie wir leicht zeigen können, nur ein lokales Minimum auf, denn es ist

$$\frac{\partial r(\varphi, \delta)}{\partial\varphi} = d\tan\varphi\sqrt{1 + \tan^2\delta}\sqrt{1 + \tan^2\varphi} = 0$$

für $\varphi = 0.$ Schließlich ist

$$\frac{\partial r(\theta, \varphi, \delta)}{\partial\delta} = d\tan\delta\sqrt{1 + \tan^2\varphi}\sqrt{1 + \tan^2\delta} = 0$$

für $\delta = 0.$ Die zweiten partiellen und gemischten Ableitungen lauten

$$\frac{\partial^2 r(\varphi,\delta)}{\partial\varphi^2} = d\left(1+2\tan^2\varphi\right)\sqrt{1+\tan^2\delta}\,\sqrt{1+\tan^2\varphi},$$
$$\frac{\partial^2 r(\varphi,\delta)}{\partial\delta^2} = d\left(1+2\tan^2\delta\right)\sqrt{1+\tan^2\delta}\,\sqrt{1+\tan^2\varphi},$$
$$\frac{\partial^2 r(\varphi,\delta)}{\partial\delta\partial\varphi} = \frac{\partial^2 r(\varphi,\delta)}{\partial\varphi\partial\delta} = d\tan\delta\tan\varphi\sqrt{1+\tan^2\delta}\,\sqrt{1+\tan^2\varphi}.$$

Daher ist die quadratische Form

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 r}{\partial\varphi^2} & \dfrac{\partial^2 r}{\partial\delta\partial\varphi} \\ \dfrac{\partial^2 r}{\partial\varphi\partial\delta} & \dfrac{\partial^2 r}{\partial\delta^2} \end{vmatrix}(0,0) = \begin{vmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = d^2 > 0$$

positiv definit und es liegt im Punkt $(0,0)$ ein relatives Minimum vor. Betrachten wir nun den allgemeinen Fall

$$r(\varphi,\delta,v_0) = d\sqrt{1+\tan^2\varphi}\sqrt{1+\left[\tan\delta - \frac{1}{2}\frac{gd}{v_0^2}\left(1+\tan^2\delta\right)\sqrt{1+\tan^2\varphi}\right]^2}.$$

Um die Extremwerte der Funktion zu bestimmen, müssen wir die partiellen Ableitungen null-setzen. Die Ableitung nach dem Azimut,

$$\frac{\partial r}{\partial\varphi} = \frac{d\tan\varphi\sqrt{1+\tan^2\varphi}\tan^2\delta}{\sqrt{1+\tan^2\delta\left[1-\dfrac{gd}{v_0^2\sin 2\delta}\sqrt{1+\tan^2\varphi}\right]^2}}\left\{\left[1-\frac{gd}{v_0^2\sin 2\delta}\sqrt{1+\tan^2\varphi}\right]^2\right.$$
$$\left. -\frac{gd}{v_0^2\sin 2\delta}\sqrt{1+\tan^2\varphi}\left[1-\frac{gd}{v_0^2\sin 2\delta}\sqrt{1+\tan^2\varphi}\right]+\frac{1}{\tan^2\delta}\right\},$$

ist gleich null für $\varphi = 0.$ Eine weitere Nullstelle finden wir, indem wir den Ausdruck

$$0 = \left[1-\frac{gd}{v_0^2\sin 2\delta}\sqrt{1+\tan^2\varphi}\right]^2 - \frac{gd}{v_0^2\sin 2\delta}\sqrt{1+\tan^2\varphi}\left[1-\frac{gd}{v_0^2\sin 2\delta}\sqrt{1+\tan^2\varphi}\right]$$
$$+\frac{1}{\tan^2\delta}$$

auswerten. Wenn wir

$$x \equiv \frac{gd}{v_0^2\sin 2\delta}\sqrt{1+\tan^2\varphi}$$

setzen, erhalten wir eine quadratische Gleichung

$$2x^2 - 3x + 1 + \frac{1}{\tan^2\delta} = 0,$$

deren Lösungen gegeben sind durch

$$x = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{1 - \frac{8}{\tan^2 \delta}},$$

wobei $\delta \geq \arctan\left(2\sqrt{2}\right) = 70{,}5°$. Für

$$\delta = \arctan \sqrt{8} = 70{,}5° \quad \text{bzw.} \quad \sin 2\delta = \frac{2\tan\delta}{1 + \tan^2\delta} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

erhalten wir mittels der Relation

$$\varphi = \arctan \sqrt{\frac{2v_0^4}{9g^2 d^2} - 1}$$

eine weitere Nullstelle, falls

$$\frac{v_0^2}{gd} \geq \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2{,}1.$$

Die zweite partielle Ableitung nach dem Azimutwinkel ergibt sich demnach zu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 r}{\partial \varphi^2} = {} & \frac{d \tan\varphi \sqrt{1+\tan^2\varphi}\, \tan^2\delta}{\sqrt{1 + \tan^2\delta \left[1 - \frac{gd}{v_0^2 \sin 2\delta}\sqrt{1+\tan^2\varphi}\right]^2}} \\
& \times \left(4\frac{gd}{v_0^2 \sin 2\delta}\sqrt{1+\tan^2\varphi} - 3\right)\frac{gd}{v_0^2 \sin 2\delta}\tan\varphi\sqrt{1+\tan^2\varphi} \\
& + \left\{ d\tan^4\delta \tan^2\varphi \sqrt{1+\tan^2\varphi}\, \frac{\left[1 - \frac{gd}{v_0^2 \sin 2\delta}\sqrt{1+\tan^2\varphi}\right]}{\sqrt{1 + \tan^2\delta \left[1 - \frac{gd}{v_0^2 \sin 2\delta}\sqrt{1+\tan^2\varphi}\right]^2}^{\,3}} \right. \\
& \left. \times \frac{gd}{v_0^2 \sin 2\delta}\sqrt{1+\tan^2\varphi} + d\tan^2\delta\sqrt{1+\tan^2\varphi}\, \frac{1 + 2\tan^2\varphi}{\sqrt{1 + \tan^2\delta \left[1 - \frac{gd}{v_0^2 \sin 2\delta}\sqrt{1+\tan^2\varphi}\right]^2}} \right\} \\
& \times \left\{ \left[1 - \frac{gd}{v_0^2 \sin 2\delta}\sqrt{1+\tan^2\varphi}\right]^2 - \frac{gd}{v_0^2 \sin 2\delta}\sqrt{1+\tan^2\varphi}\left[1 - \frac{gd}{v_0^2 \sin 2\delta}\sqrt{1+\tan^2\varphi}\right] + \frac{1}{\tan^2\delta} \right\}.
\end{aligned}$$

An der Stelle der Hauptsingularität gilt mit

$$\sin 2\delta = \frac{gd}{v_0^2}\sqrt{1+\tan^2\varphi}$$

und $\varphi = 0$ für den Wert der Krümmung

$$\frac{\partial^2 r}{\partial \varphi^2} = d > 0.$$

Die Ableitung nach dem Elevationswinkel

$$\frac{\partial r}{\partial \delta} = d \frac{\sqrt{1+\tan^2\varphi}\tan\delta\left(1+\tan^2\delta\right)}{\sqrt{1+\tan^2\delta\left[1-\frac{gd}{v_0^2\sin 2\delta}\sqrt{1+\tan^2\varphi}\right]^2}}\left[1-\frac{gd}{v_0^2\sin 2\delta}\sqrt{1+\tan^2\varphi}\right]$$
$$\times\left[1-\frac{gd\sqrt{1+\tan^2\varphi}}{v_0^2}\tan\delta\right]$$

liefert nach Nullsetzen die folgende Gleichung

$$\left[\sin 2\delta - \frac{gd\sqrt{1+\tan^2\varphi}}{v_0^2}\right] - \left[\sin 2\delta - \frac{gd\sqrt{1+\tan^2\varphi}}{v_0^2}\right]\frac{gd\sqrt{1+\tan^2\varphi}}{v_0^2}\tan\delta = 0,$$

die mittels der Definition

$$x \equiv \frac{gd}{v_0^2}\sqrt{1+\tan^2\varphi}$$

auf eine quadratische Gleichung der Form

$$x^2 - \frac{1+3\tan^2\delta}{\tan\delta\left(1+\tan^2\delta\right)}x + \frac{2\tan\delta}{\tan\delta\left(1+\tan^2\delta\right)} = 0$$

gebracht werden kann, deren Lösungen durch

$$x = \frac{1+3\tan^2\delta}{2\tan\delta\left(1+\tan^2\delta\right)} \pm \frac{\left|1-\tan^2\delta\right|}{2\tan\delta\left(1+\tan^2\delta\right)}$$

gegeben sind. Sowohl im Falle $\tan\delta \le 1$ als auch für $\tan\delta > 1$ gibt es zwei Lösungen

$$x = \frac{1+3\tan^2\delta \pm \left(1-\tan^2\delta\right)}{2\tan\delta\left(1+\tan^2\delta\right)}.$$

Im allgemeinen Fall haben wir also drei Nullstellen für

$$x = \frac{1}{\tan\delta} \quad \text{und} \quad x = \frac{2\tan\delta}{1+\tan^2\delta} = \sin 2\delta,$$

d.h.

$$\sin 2\delta = \frac{gd}{v_0^2}\sqrt{1+\tan^2\varphi} \quad \text{und} \quad \tan\delta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}\frac{v_0^2}{gd}.$$

Eine einzige Nullstelle erhalten wir, wenn wir

$$\sin 2\delta = \frac{gd}{v_0^2}\sqrt{1+\tan^2\varphi} = \frac{2\tan\delta}{1+\tan^2\delta} = \frac{1}{\tan\delta}$$

setzen, was für

$$\tan\delta = 1 \quad \text{bzw.} \quad \delta = \frac{\pi}{4}$$

der Fall ist, und damit für

$$v_0^2 = gd\sqrt{1+\tan^2\varphi}$$

bzw. $r(\varphi) = d\sqrt{1+\tan^2\varphi}$. Daß die allgemeine Abstandsfunktion drei Extremwerte aufweist, und zwar zwei lokale Minima und ein lokales Maximum, sieht man sehr schön in Abb. 3. Die zweite partielle Ableitung nach dem Elevationswinkel ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 r}{\partial\delta^2} = d\,&\frac{\sqrt{1+\tan^2\varphi}\left(1+\tan^2\delta\right)^2}{\sqrt{1+\tan^2\delta\left[1-\frac{gd}{v_0^2\sin 2\delta}\sqrt{1+\tan^2\varphi}\right]^2}} \\
&\times\left(\frac{2\tan^2\delta}{1+\tan^2\delta}\left[1-\frac{gd\sqrt{1+\tan^2\varphi}}{v_0^2\sin 2\delta}\right]\left[1-\frac{gd\sqrt{1+\tan^2\varphi}}{v_0^2}\tan\delta\right]\right. \\
&\left.+\left[1-\frac{gd\sqrt{1+\tan^2\varphi}}{v_0^2}\tan\delta\right]^2-\frac{gd\sqrt{1+\tan^2\varphi}}{v_0^2}\tan\delta\left[1-\frac{gd\sqrt{1+\tan^2\varphi}}{v_0^2\sin 2\delta}\right]\right) \\
&-d\,\frac{\sqrt{1+\tan^2\varphi}\tan^2\delta\left(1+\tan^2\delta\right)^2}{\sqrt{1+\tan^2\delta\left[1-\frac{gd}{v_0^2\sin 2\delta}\sqrt{1+\tan^2\varphi}\right]^2}^{\,3}}\left[1-\frac{gd\sqrt{1+\tan^2\varphi}}{v_0^2\sin 2\delta}\right]^2 \\
&\times\left[1-\frac{gd\sqrt{1+\tan^2\varphi}}{v_0^2}\tan\delta\right]^2.
\end{aligned}$$

An der Stelle

$$\sin 2\delta = \frac{gd}{v_0^2}\sqrt{1+\tan^2\varphi}$$

ist

$$\frac{\partial^2 r}{\partial\delta^2} = d\sqrt{1+\tan^2\varphi}\left(1+\tan^2\delta\right)^2\left[1-\frac{gd\sqrt{1+\tan^2\varphi}}{v_0^2}\tan\delta\right]^2.$$

Den Wert für den Tangens des Elevationswinkels liefert die quadratische Gleichung

$$\tan^2\delta - \frac{2v_0^2}{gd\sqrt{1+\tan^2\varphi}}\tan\delta + 1 = 0.$$

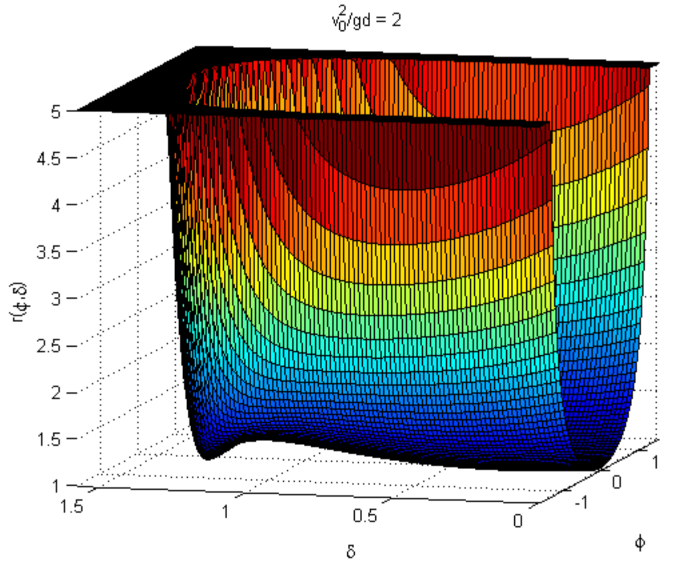

Abbildung 3. Radiale Abstandsfunktion bei verdoppelter kinetischer Energie

Diese besitzt die Lösungen

$$\tan\delta = \frac{v_0^2}{gd\sqrt{1+\tan^2\varphi}}\left[1 \pm \sqrt{1-\frac{g^2d^2}{v_0^4}\left(1+\tan^2\varphi\right)}\right].$$

Damit ist

$$\frac{\partial^2 r}{\partial\delta^2} = d\left(1+\tan^2\delta\right)^2\left\{1-\frac{g^2d^2}{v_0^4}\right\}.$$

Weil es nur Lösungen für

$$\frac{gd\sqrt{1+\tan^2\varphi}}{v_0^2} \le 1$$

gibt, ist $\partial^2 r/\partial\delta^2 \ge 0,$ also ist die Krümmung positiv. Die zweite partielle Ableitung an der Nullstelle ist somit gegeben durch

$$\frac{\partial^2 r}{\partial\delta^2} = d\left(1-\tan^2\delta\right)^2 > 0,$$

wobei

$$\tan\delta = \frac{v_0^2}{gd} \pm \sqrt{\frac{v_0^4}{g^2d^2}-1},$$

und an der zweiten Nullstelle

$$\frac{gd}{v_0^2}\sqrt{1+\tan^2\varphi}\,\tan\delta = 1$$

ist

$$\frac{\partial^2 r}{\partial \delta^2} = \frac{d}{2} \frac{\sqrt{1+\tan^2\varphi}\left(1+\tan^2\delta\right)^2}{\sqrt{1+\left[\frac{\tan^2\delta-1}{2}\right]^2}} \left(\frac{1}{\tan^2\delta}-1\right).$$

Das Vorzeichen der Krümmung hängt hier vom Wert von δ ab. Für Werte kleiner $\pi/4$ ist die Krümmung positiv. Die nun noch fehlende partielle Ableitung nach v_0 erhalten wir mittels Nullsetzen von

$$\frac{\partial r}{\partial v_0} = \left(1+\tan^2\varphi\right)\tan\delta\left(1+\tan^2\delta\right)\frac{gd^2}{v_0^3} \frac{1-\frac{gd}{v_0^2 \sin 2\delta}\sqrt{1+\tan^2\varphi}}{\sqrt{1+\tan^2\delta\left[1-\frac{gd}{v_0^2\sin 2\delta}\sqrt{1+\tan^2\varphi}\right]^2}}.$$

Die Nullstelle ergibt sich zu

$$v_0 = \sqrt{\frac{gd}{\sin 2\delta}\sqrt{1+\tan^2\varphi}}.$$

Das ist aber die gleiche Nullstelle wie für den Winkel δ. Daher kann eine der beiden Größen δ oder v_0 in Abhängigkeit von der anderen gesehen werden.

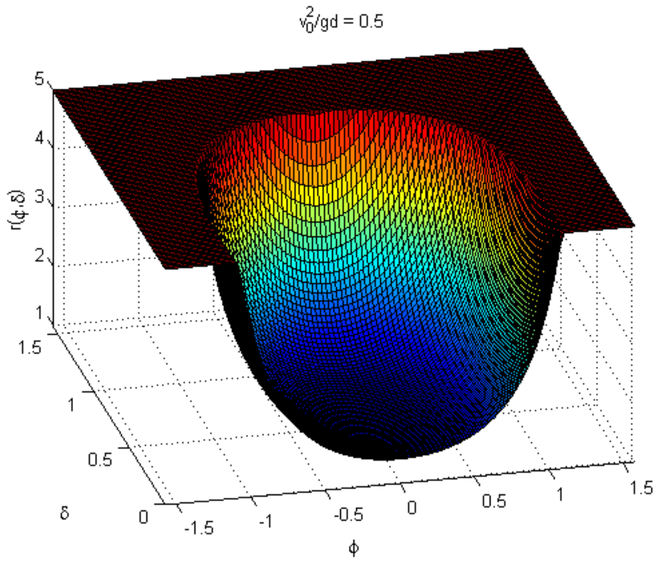

Abbildung 4. Die Hyperfläche für die hälftige kinetische Energie

Die gemischten Ableitungen sind gegeben durch

$$\frac{\partial^2 r}{\partial\delta\partial\varphi} = d\tan\varphi\sqrt{1+\tan^2\varphi}\frac{\tan^2\delta}{\sqrt{1+\tan^2\delta\left[1-\frac{gd}{v_0^2\sin 2\delta}\sqrt{1+\tan^2\varphi}\right]^2}}$$

$$\times\left(6\frac{gd}{v_0^2}\sqrt{1+\tan^2\varphi}\frac{\cot 2\delta}{\sin 2\delta}-8\left(\frac{gd}{v_0^2}\right)^2\left(1+\tan^2\varphi\right)\frac{\cot 2\delta}{\sin^2 2\delta}\right)$$

$$+d\tan\varphi\sqrt{1+\tan^2\varphi}\frac{2\tan\delta\left(1+\tan^2\delta\right)}{\sqrt{1+\tan^2\delta\left[1-\frac{gd}{v_0^2\sin 2\delta}\sqrt{1+\tan^2\varphi}\right]^2}}$$

$$\times\left\{\left[1-\frac{gd}{v_0^2\sin 2\delta}\sqrt{1+\tan^2\varphi}\right]^2-\frac{gd}{v_0^2\sin 2\delta}\sqrt{1+\tan^2\varphi}\left[1-\frac{gd}{v_0^2\sin 2\delta}\sqrt{1+\tan^2\varphi}\right]+\frac{1}{\tan^2\delta}\right\}$$

$$+d\tan\varphi\sqrt{1+\tan^2\varphi}\frac{\tan^3\delta\left(1+\tan^2\delta\right)}{\sqrt{1+\tan^2\delta\left[1-\frac{gd}{v_0^2\sin 2\delta}\sqrt{1+\tan^2\varphi}\right]^2}^3}$$

$$\times\left\{\left[1-\frac{gd}{v_0^2\sin 2\delta}\sqrt{1+\tan^2\varphi}\right]^2-\cot 2\delta\left(\frac{gd}{v_0^2}\sqrt{1+\tan^2\varphi}-\left(\frac{gd}{v_0^2}\right)^2\frac{1+\tan^2\varphi}{\sin 2\delta}\right)\right\}$$

$$\times\left\{\left[1-\frac{gd}{v_0^2\sin 2\delta}\sqrt{1+\tan^2\varphi}\right]^2-\frac{gd}{v_0^2\sin 2\delta}\sqrt{1+\tan^2\varphi}\left[1-\frac{gd}{v_0^2\sin 2\delta}\sqrt{1+\tan^2\varphi}\right]+\frac{1}{\tan^2\delta}\right\}$$

Im Minimum verschwindet der Ausdruck wegen $\varphi = 0,$ so daß die quadratische Form

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 r}{\partial\varphi^2} & \frac{\partial^2 r}{\partial\delta\partial\varphi} \\ \frac{\partial^2 r}{\partial\varphi\partial\delta} & \frac{\partial^2 r}{\partial\delta^2} \end{vmatrix}(0, \frac{1}{2}\arcsin\frac{gd}{v_0^2}) = \begin{vmatrix} d & 0 \\ 0 & d\left(1-\tan^2\left[\frac{1}{2}\arcsin\frac{gd}{v_0^2}\right]\right)^2 \end{vmatrix}$$

$$= d^2\left(1-\tan^2\left[\frac{1}{2}\arcsin\frac{gd}{v_0^2}\right]\right)^2 > 0$$

auch im allgemeinen Fall positiv definit ist und dort ein lokales Minimum vorliegt.

Welche Bedeutung hat nun eine solche Hyperfläche für ein natürliches neuronales Netz? Ein ungeübter Werfer startet an einem beliebigen Punkt der Hyperfläche und verfehlt klarerweise das Ziel, weil seine Gewichtsmatrix, d.h. die Abbildung der Eingangs- auf die Ausgangsneuronen bei zuwenig Übung noch nicht die korrekten Trainingsgewichte aufweist. Im Laufe eines Trainingszyklus kristallisieren sich in Verbindung mit im Gedächtnis hängenbleibenden Erfolgserlebnissen mehr und mehr die optimalen Gewichte heraus. Ein natürliches neuronales Netz kann unbegrenzt verbessert werden, jedoch sind die irgendwann erreichten Korrekturgrößen nicht mehr verbesserungswürdig, weil sie für das, was sie leisten sollen, gut genug sind. Irgendwann erworbene Fähigkeiten wie etwa unsere Sprache sollten daher bei regelmäßiger Auffrischung theoretisch auch nie mehr verlernt werden.

