Aufgabe: Berechnen Sie die Bahngleichung des schrägen Wurfs unter Einschluß des Luftwiderstands als rekurrentes neuronales Netz.

Lösung: Die Beschleunigung des geworfenen Körpers unter Einschluß der Reibungskraft lautet

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\beta\dot{\mathbf{r}} - g\mathbf{e}_z,$$

wobei $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ die Erdbeschleunigung ist und β der Reibungskoeffizient. Aus

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \quad \text{folgt} \quad \ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}} = -\beta\mathbf{v} - g\mathbf{e}_z.$$

Schreiben wir die beiden Differentialgleichungen als Differenzengleichungen, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t_i) &= \mathbf{r}(t_{i-1}) + \mathbf{v}(t_{i-1})\Delta t,\\
\mathbf{v}(t_i) &= \mathbf{v}(t_{i-1}) - \beta\mathbf{v}(t_{i-1})\Delta t - g\Delta t\mathbf{e}_z.
\end{aligned}$$

Die Anfangsbedingungen sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t_0) &= \mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{e}_x + y_0\mathbf{e}_z,\\
\mathbf{v}(t_0) &= \mathbf{v}_0 = v_0\cos\delta\mathbf{e}_x + v_0\sin\delta\mathbf{e}_z.
\end{aligned}$$

Damit lautet das erste Rekursionsglied

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t_1) &= \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{v}(t_0)\Delta t = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0\Delta t,\\
\mathbf{v}(t_1) &= \mathbf{v}(t_0) - \beta\mathbf{v}(t_0)\Delta t - g\Delta t\mathbf{e}_z = (1-\beta\Delta t)\mathbf{v}_0 - g\Delta t\mathbf{e}_z.
\end{aligned}$$

Ferner erhalten wir im zweiten Rekursionsschritt

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t_2) &= \mathbf{r}(t_1) + \mathbf{v}(t_1)\Delta t = \mathbf{r}_0 + (1+(1-\beta\Delta t))\mathbf{v}_0\Delta t - g\Delta t^2\mathbf{e}_z,\\
\mathbf{v}(t_2) &= (1-\beta\Delta t)\mathbf{v}(t_1) - g\Delta t\mathbf{e}_z = (1-\beta\Delta t)^2\mathbf{v}_0 - (1+(1-\beta\Delta t))g\Delta t\mathbf{e}_z,
\end{aligned}$$

und für den dritten

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t_3) &= \mathbf{r}(t_2) + \mathbf{v}(t_2)\Delta t = \mathbf{r}_0 + \left(1+(1-\beta\Delta t)+(1-\beta\Delta t)^2\right)\mathbf{v}_0\Delta t - (2+(1-\beta\Delta t))g\Delta t^2\mathbf{e}_z,\\
\mathbf{v}(t_3) &= (1-\beta\Delta t)\mathbf{v}(t_2) - g\Delta t\mathbf{e}_z = (1-\beta\Delta t)^3\mathbf{v}_0 - \left(1+(1-\beta\Delta t)+(1-\beta\Delta t)^2\right)g\Delta t\mathbf{e}_z.
\end{aligned}$$

Zur Sicherheit berechnen wir auch noch den vierten Rekursionsschritt. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t_4) &= \mathbf{r}(t_3) + \mathbf{v}(t_3)\Delta t = \mathbf{r}_0 + \left(1+(1-\beta\Delta t)+(1-\beta\Delta t)^2+(1-\beta\Delta t)^3\right)\mathbf{v}_0\Delta t\\
&\quad - \left(3+2(1-\beta\Delta t)+(1-\beta\Delta t)^2\right)g\Delta t^2\mathbf{e}_z,\\
\mathbf{v}(t_4) &= (1-\beta\Delta t)\mathbf{v}(t_3) - g\Delta t\mathbf{e}_z = (1-\beta\Delta t)^4\mathbf{v}_0\\
&\quad - \left(1+(1-\beta\Delta t)+(1-\beta\Delta t)^2+(1-\beta\Delta t)^3\right)g\Delta t\mathbf{e}_z,
\end{aligned}$$

womit wir schließlich die allgemeinen Rekursionsformeln ableiten können:

$$\mathbf{r}(t_i) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 \Delta t \sum_{k=0}^{i-1} (1-\beta\Delta t)^k - g\Delta t^2 \mathbf{e}_z \sum_{k=0}^{i-2} (i-k-1)(1-\beta\Delta t)^k,$$
$$\mathbf{v}(t_i) = (1-\beta\Delta t)^i \mathbf{v}_0 - g\Delta t \mathbf{e}_z \sum_{k=0}^{i-1} (1-\beta\Delta t)^k,$$

die ein rekurrentes neuronales Netz darstellen. In Kompenentenschreibweise aufgelöst ergeben sich folgende Gleichungen:

$$x(t_i) = x_0 + v_0 \cos\delta \Delta t \sum_{k=0}^{i-1} (1-\beta\Delta t)^k,$$
$$z(t_i) = z_0 + v_0 \sin\delta \Delta t \sum_{k=0}^{i-1} (1-\beta\Delta t)^k - g\Delta t^2 \mathbf{e}_z \sum_{k=0}^{i-2} (i-k-1)(1-\beta\Delta t)^k,$$
$$v_x(t_i) = (1-\beta\Delta t)^i v_0 \cos\delta,$$
$$v_z(t_i) = (1-\beta\Delta t)^i v_0 \sin\delta - g\Delta t \sum_{k=0}^{i-1} (1-\beta\Delta t)^k.$$

Für die Beispielrechnung machen wir uns das Leben leicht und wählen möglichst einfache Werte, und zwar $(x_0, y_0) = (0, 0)$ und $\delta = \pi/4.$ Mit $\Delta t = 1/n,$ wobei n die Zahl der Stützstellen angibt, vereinfacht sich obiges Gleichungssystem zu

$$x(t_i) = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{i-1} \left(1-\frac{\beta}{n}\right)^k,$$
$$z(t_i) = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{i-1} \left(1-\frac{\beta}{n}\right)^k - \frac{g}{n^2} \sum_{k=0}^{i-2} (i-k-1)\left(1-\frac{\beta}{n}\right)^k,$$
$$v_x(t_i) = \left(1-\frac{\beta}{n}\right)^i \frac{v_0}{\sqrt{2}},$$
$$v_z(t_i) = \left(1-\frac{\beta}{n}\right)^i \frac{v_0}{\sqrt{2}} - \frac{g}{n} \sum_{k=0}^{i-1} \left(1-\frac{\beta}{n}\right)^k.$$

Für Rechenzwecke kann es praktischer sein zu setzen:

$$\sum_{k=0}^{i-1} \left(1-\frac{\beta}{n}\right)^k = \sum_{k=1}^{i} \left(1-\frac{\beta}{n}\right)^{k-1} = \frac{n}{\beta}\left[1-\left(1-\frac{\beta}{n}\right)^i\right],$$
$$\sum_{k=0}^{i-2} (i-k-1)\left(1-\frac{\beta}{n}\right)^k = \sum_{k=1}^{i-1} (i-k)\left(1-\frac{\beta}{n}\right)^{k-1},$$

wobei wir die endliche geometrische Reihe benutzt haben. Damit läßt sich unser Gleichungssystem weiter vereinfachen:

$$x(t_i) = \frac{1}{\beta}\left[1-\left(1-\frac{\beta}{n}\right)^i\right] \frac{v_0}{\sqrt{2}}, \quad z(t_i) = x(t_i) - \frac{g}{n^2} \sum_{k=1}^{i-1} (i-k)\left(1-\frac{\beta}{n}\right)^{k-1},$$
$$v_x(t_i) = \left(1-\frac{\beta}{n}\right)^i \frac{v_0}{\sqrt{2}}, \qquad v_z(t_i) = v_x(t_i) - \frac{\sqrt{2}g}{v_0} x(t_i).$$

Unter den oben getroffenen Annahmen gelten folgende Anfangsbedingungen:

$$x(t_0) = z(t_0) = 0 \quad \text{und} \quad v_z(t_0) = v_x(t_0) = \frac{v_0}{\sqrt{2}},$$

und die Lösungen des ersten Iterationsschrittes lauten:

$$z(t_1) = x(t_1) = \frac{1}{n}\frac{v_0}{\sqrt{2}}, \quad v_x(t_1) = \left(1 - \frac{\beta}{n}\right)\frac{v_0}{\sqrt{2}}, \quad v_z(t_1) = v_x(t_1) - \frac{\sqrt{2}g}{v_0}x(t_1).$$

Ab dem zweiten Iterationsschritt kann man für die z-Koordinate die angegebene Iterationsformel benutzen:

$$\begin{aligned}
z(t_2) &= x(t_2) - \frac{g}{n^2}, \\
z(t_3) &= x(t_3) - \frac{g}{n^2}\left[2 + \left(1 - \frac{\beta}{n}\right)\right], \\
z(t_4) &= x(t_4) - \frac{g}{n^2}\left[3 + 2\left(1 - \frac{\beta}{n}\right) + \left(1 - \frac{\beta}{n}\right)^2\right], \\
z(t_5) &= x(t_5) - \frac{g}{n^2}\left[4 + 3\left(1 - \frac{\beta}{n}\right) + 2\left(1 - \frac{\beta}{n}\right)^2 + \left(1 - \frac{\beta}{n}\right)^3\right].
\end{aligned}$$

In der Abbildung sind für zwei verschiedene Schrittweiten mit $n = 100$ und $n = 1000$ die neuronalen Lösungen dieser Differentialgleichung angegeben. In der Tat hängt die gewünschte Genauigkeit nur von der Schrittweite ab. Das Verfahren hat gegenüber der analytischen Vorgehensweise den Vorteil, daß man damit beliebige Differentialgleichungen lösen kann.

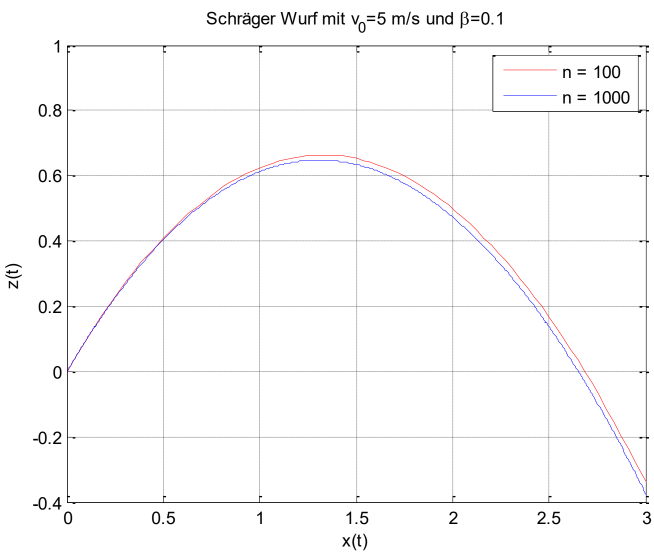

Abbildung 1. Rekurrentes Netz für den schrägen Wurf

Nachfolgend die einfache Programmierung in Matlab.

Anhang

```
% Rekurrentes neuronales Netz
clear all

beta = 0.1;
v_0 = 5;
g = 9.91;

n = 101;
Delta_t = 1/n;

x(1) = 0;
z(1) = 0;
v_x(1) = v_0/sqrt(2);
v_z(1) = v_x(1);

for i=1:n
    x(i+1) = x(i) + v_x(i)*Delta_t;
    z(i+1) = z(i) + v_z(i)*Delta_t;
    v_x(i+1) = v_x(i) + beta*v_x(i)*Delta_t;
    v_z(i+1) = v_z(i) + beta*v_z(i)*Delta_t - g*Delta_t;
end

plot(x,z,'r')

hold on

n = 1001;
Delta_t = 1/n;

x(1) = 0;
z(1) = 0;
v_x(1) = v_0/sqrt(2);
v_z(1) = v_x(1);

for i=1:n
    x(i+1) = x(i) + v_x(i)*Delta_t;
    z(i+1) = z(i) + v_z(i)*Delta_t;
    v_x(i+1) = v_x(i) + beta*v_x(i)*Delta_t;
    v_z(i+1) = v_z(i) + beta*v_z(i)*Delta_t - g*Delta_t;
end

plot(x,z)
grid on
xlim([0 3])
xlabel('x(t)')
ylabel('z(t)')
title('Schräger Wurf mit v_0=5 m/s und \beta=0.1')
legend('n = 100','n = 1000');
```

