Aufgabe: Betrachten wir zwei sich schneidende Kreise mit unterschiedlichen Radien und gemeinsamer Tangente. Berechnen Sie das Verhältnis der Bogenlängen vom Schnittpunkt des jeweiligen Kreises mit der Tangente zum gemeinsamen Schnittpunkt.

Lösung: Sei d_0 der Abstand zwischen den beiden Schnittpunkten der Kreise mit der gemeinsamen Tangente an die Kreise. Dann sind

$$b_1 = R_1\varphi_1 \quad \text{und} \quad b_2 = R_2\varphi_2$$

die gesuchten Bogenlängen, deren Verhältnis zu bilden ist. Dabei ist φ_1 der Winkel zwischen der x-Achse und einer Geraden durch den Mittelpunkt des kleineren der beiden Kreise sowie jenen der beiden Schnittpunkte, der den kleineren Winkel mit der x-Achse einschließt.[1] Der Winkel φ_2 sei der Winkel zwischen einer zur x-Achse parallelen Geraden im Abstand η und einer Geraden durch den Mittelpunkt des Kreises mit dem größeren Radius sowie den soeben definierten gemeinsamen Schnittpunkt (wie in Abb. 1 dargestellt).

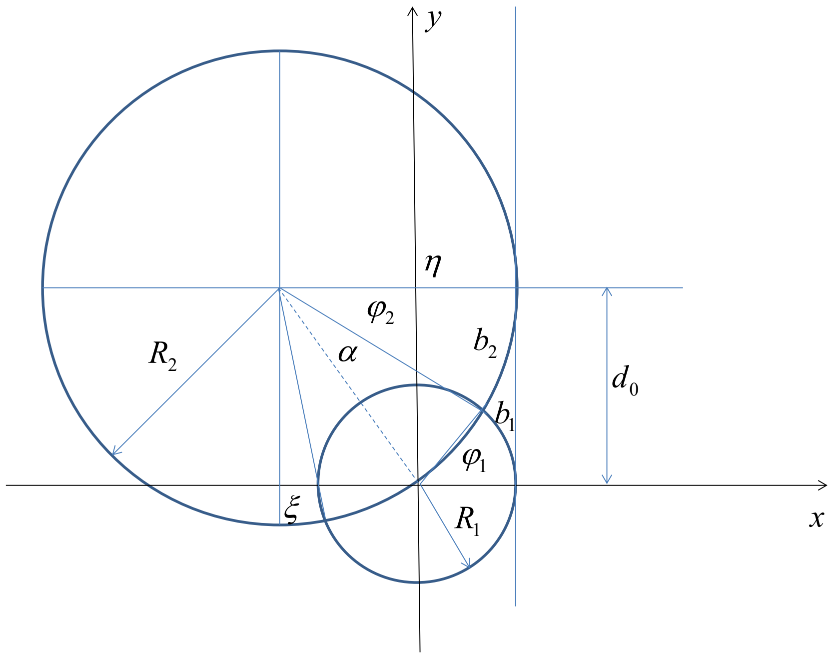

Abbildung 1. Zwei sich schneidende Kreise mit bis zu zwei sich ergebenden Schnittpunkten

Die Schnittpunkte der beiden Kreise erhalten wir, indem wir zunächst die quadratischen Terme eines der beiden Kreise mit dem Radius des anderen Kreises eliminieren und so auf eine Geradengleichung kommen, die durch beide Schnittpunkte geht. Seien ξ und η die Koordinaten des Mittelpunkts des größeren der beiden Kreise mit dem Radius R_2. Aus

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = R_2^2 \quad \text{bzw.} \quad x^2 + y^2 = R_1^2$$

[1] Dieser sollte nach Möglichkeit im ersten Quadranten liegen, obwohl das keine zwingende Voraussetzung ist.

folgt nach entsprechender Auflösung eine Geradengleichung, die wir zur Bestimmung die y-Koordinaten der beiden Schnittpunkte verwenden können:

$$y = \frac{1}{2\eta}\left(\xi^2 + \eta^2 - R_2^2 + R_1^2\right) - \frac{\xi}{\eta}x.$$

Diese Geradengleichung setzen wir zur Eliminierung der y-Koordinate in die Gleichung des kleineren der beiden Kreise ein und erhalten somit eine quadratische Gleichung, deren Lösungen die beiden Schnittpunkte angeben:

$$\left(1 + \frac{\xi^2}{\eta^2}\right)x^2 - \frac{\xi}{\eta^2}\left(\xi^2 + \eta^2 - R_2^2 + R_1^2\right)x + \frac{1}{4\eta^2}\left(\xi^2 + \eta^2 - R_2^2 + R_1^2\right)^2 - R_1^2 = 0.$$

Mit der Notation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

erhalten wir die Koeffizienten zu

$$a = 1 + \frac{\xi^2}{\eta^2}, \quad b = -\frac{\xi}{\eta^2}\left(\xi^2 + \eta^2 - R_2^2 + R_1^2\right), \quad c = \frac{1}{4\eta^2}\left(\xi^2 + \eta^2 - R_2^2 + R_1^2\right)^2 - R_1^2.$$

Seien nun

$$\xi \equiv R_1 - R_2 \quad \text{und} \quad \eta \equiv d_0$$

die Mittelpunktkoordinaten des größeren Kreises. Damit vereinfachen sich die Koeffizienten zu

$$a = 1 + \frac{(R_1 - R_2)^2}{d_0^2}, \quad b = -(R_1 - R_2) - \frac{2R_1(R_1 - R_2)^2}{d_0^2}, \quad c = \frac{d_0^2}{4} - R_1R_2 + \frac{R_1^2(R_1 - R_2)^2}{d_0^2}.$$

Die beiden Lösungen sind damit gegeben durch

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

wobei mittels

$$b^2 = (R_1 - R_2)^2 + \frac{4R_1(R_1 - R_2)^3}{d_0^2} + \frac{4R_1^2(R_1 - R_2)^4}{d_0^4}$$

für die Diskriminante folgt:

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{4R_1R_2 - d_0^2}.$$

Für Werte $d_0 \le 2\sqrt{R_1R_2}$ ergeben sich damit die folgenden Lösungen:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\frac{(R_1 - R_2)d_0^2 + 2R_1(R_1 - R_2)^2 \pm d_0^2\sqrt{4R_1R_2 - d_0^2}}{d_0^2 + (R_1 - R_2)^2}.$$

Im entarteten Grenzfall $d_0 = 2\sqrt{R_1R_2}$ verschwindet die Wurzel und es gibt nur einen Schnittpunkt bei

$$x = \frac{1}{2}\frac{d_0^2(R_1 - R_2) + 2R_1(R_1 - R_2)^2}{d_0^2 + (R_1 - R_2)^2},$$

dessen x-Koordinate positiv oder negativ sein kann, je nachdem, ob

$$d_0 < \sqrt{2R_1(R_2 - R_1)} \quad \text{oder} \quad d_0 > \sqrt{2R_1(R_2 - R_1)}.$$

Für $d_0 = 0$ gibt es nur eine Lösung für $x = R_1$ und $\varphi_1 = 0.$ Der kleine Kreis liegt in diesem Fall vollständig innerhalb des größeren und berührt diesen nur in einem Punkt.

Betrachten wir nur Lösungen für Winkel zwischen 0 und $\pi/2,$ so muß x positiv sein und es muß gelten:

$$(R_1 - R_2)d_0^2 + 2R_1(R_1 - R_2)^2 + d_0^2\sqrt{4R_1R_2 - d_0^2} \geq 0$$

bzw.

$$4R_1R_2 - (R_2 - R_1)^2 \geq d_0^2 - \frac{4R_1(R_2 - R_1)^3}{d_0^2} + \frac{4R_1^2(R_2 - R_1)^4}{d_0^4}.$$

Dividieren wir durch das Abstandsquadrat $d_0^2,$ so ergibt sich nach einiger Umformung

$$\left[4\frac{R_2}{R_1} - \left(\frac{R_2}{R_1} - 1\right)^2\right]\frac{R_1^2}{d_0^2} + 4\frac{R_1^4}{d_0^4}\left(\frac{R_2}{R_1} - 1\right)^3 \geq 1 + 4\frac{R_1^6}{d_0^6}\left(\frac{R_2}{R_1} - 1\right)^4.$$

Somit erhalten wir für $R_2 = 2R_1$ die Abschätzung

$$7\frac{R_1^2}{d_0^2} + 4\frac{R_1^4}{d_0^4} \geq 1 + 4\frac{R_1^6}{d_0^6},$$

für $R_2 = 3R_1$ die Relation

$$8\frac{R_1^2}{d_0^2} + 32\frac{R_1^4}{d_0^4} \geq 1 + 64\frac{R_1^6}{d_0^6}$$

und allgemein für $R_2 = nR_1$ mit $z = R_1/d_0$ den Ausdruck

$$f(z,n) = \left(4n - (n-1)^2\right)z^2 + 4(n-1)^3 z^4 - 4(n-1)^4 z^6 - 1 \geq 0.$$

Die Funktion $f(z,n)$ ist für verschiedene Werte von n in Abb. 2 dargestellt. Der Fall $n=1$ ist ein Sonderfall und besitzt nur eine Lösung bei $z=1/2$. In Einheiten des Abstands der Kreismittelpunkte in Tangentenrichtung hängt die Nullstelle nur vom Verhältnis der Krümmungsradien und vom Verhältnis des eigenen Krümmungsradius zum Abstand der Kreismittelpunkte in Tangentenrichtung ab:

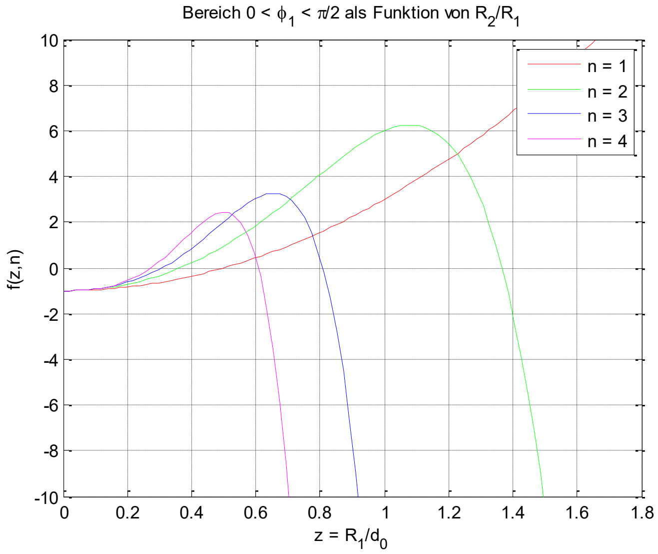

Abbildung 2. Gleichung zur Bestimmung der Schnittpunkte zweier Kreise anhand einer Nullstellensuche

Damit liegt der positive Schnittpunkt bei

$$x=\frac{R_1(R_1-R_2)^2+d_0^2\sqrt{R_1R_2-d_0^2/4}-(R_2-R_1)d_0^2/2}{d_0^2+(R_1-R_2)^2}.$$

In relativen Einheiten gilt

$$\frac{x}{R_1}=\frac{1}{1+\frac{R_1^2}{d_0^2}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)^2}\left(\frac{R_1^2}{d_0^2}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)^2+\sqrt{\frac{R_2}{R_1}-\frac{1}{4}\frac{d_0^2}{R_1^2}}-\frac{1}{2}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\right).$$

Für $R_2=nR_1$ und

$$z=\frac{R_1}{d_0}\geq\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

gilt

$$\frac{x_n}{R_1}=\frac{1}{1+(n-1)^2z^2}\left((n-1)^2z^2+\sqrt{n-\frac{1}{4z^2}}-\frac{n-1}{2}\right),$$

mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = R_1$. Klar ist, daß es für $z < 1/(2\sqrt{n})$ keine positiven Lösungen gibt. Im minimalen reziproken Abstand

$$z_{\min} = \frac{R_1}{d_0} \geq \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}},$$

der sich aus der Winkelforderung $< \pi/2$ ergibt, ist

$$\frac{x_n}{R_1} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \quad \text{und} \quad \frac{y_n}{R_1} = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}.$$

Dieses Ergebnis hängt nur vom Verhältnis der beiden Krümmungsradien ab. Bei gleichen Krümmungsradien ist

$$\frac{x_1}{R_1} = \sqrt{1-\frac{d_0^2}{4R_1^2}} \quad \text{und} \quad \frac{y_1}{R_1} = \sqrt{1-\frac{x_1^2}{R_1^2}} = \frac{d_0}{2R_1}.$$

Im Grenzfall $R_1/d_0 = 1/2$ ist also $\varphi_1 = \pi/2$. Bei einem Verhältnis $R_2 = 2R_1$ gilt

$$\frac{x_2}{R_1} = \frac{1}{1+z^2}\left(z^2 + \sqrt{2-\frac{1}{4z^2}} - \frac{1}{2}\right).$$

Die Lösungen sind dabei eingeschränkt auf $R_1/d_0 \geq 1/(2\sqrt{2})$. Im minimalen reziproken Abstand $z_{\min} = 1/\sqrt{2}$ ist

$$\frac{x_2}{R_1} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \frac{y_2}{R_1} = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad \text{und} \quad \varphi_1 = \arctan\frac{1}{\sqrt{2}} = 35{,}3°.$$

Bei einem Verhältnis $R_2 = 3R_1$ gilt

$$\frac{x_3}{R_1} = \frac{1}{1+4z^2}\left(4z^2 + \sqrt{3-\frac{1}{4z^2}} - 1\right).$$

Die Lösungen sind dabei eingeschränkt auf $R_1/d_0 \geq 1/(2\sqrt{3})$. Im minimalen reziproken Abstand $z_{\min} = 1/2$ ist

$$\frac{x_3}{R_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{y_3}{R_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \varphi_1 = \arctan(1) = 45°.$$

Das Maximum der Funktion $f(z)$ für konstantes n finden wir durch Differentiation von

$$f(z) = \left(4n-(n-1)^2\right)z^2 + 4(n-1)^3 z^4 - 4(n-1)^4 z^6 - 1$$

nach z. Das Ergebnis lautet

$$f'(z) = 2\left(4n-(n-1)^2\right)z + 16(n-1)^3 z^3 - 24(n-1)^4 z^5$$

Durch Nullsetzen der Ableitung und Kürzen von z und einigen konstanten Termen verbleibt eine quadratische Gleichung in z^2:

$$12(n-1)^2 z^4 - 8(n-1)z^2 + 1 - \frac{4n}{(n-1)^2} = 0.$$

Mit der Abkürzung $\zeta \equiv z^2$ und den Koeffizienten

$$a = 12(n-1)^2, \quad b = -8(n-1), \quad c = 1 - \frac{4n}{(n-1)^2}$$

lautet die Lösung für $n > 1$

$$\zeta_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Substituieren wir wie gehabt das Verhältnis der Krümmungsradien mit n, so finden wir für die positive Wurzel den Ausdruck

$$\zeta_n = \frac{8(n-1) + \sqrt{64(n-1)^2 - 4ac}}{24(n-1)^2} = \frac{1}{3(n-1)}\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{12n}{(n-1)^2}}\right).$$

Das Maximum der Funktion f liegt für $n = 2$ bei

$$z_2 = \sqrt{\zeta_2} = \sqrt{\frac{7}{6}} = 1{,}08,$$

für $n = 3$ bei

$$z_3 = \sqrt{\zeta_3} = \sqrt{\frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{10}\right)} = 0{,}66$$

und für $n = 4$ bei

$$z_4 = \sqrt{\zeta_4} = \frac{1}{3}\sqrt{1 + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{16}{3}}} = 0{,}5.$$

Der Wertebereich der erlaubten Krümmungsradien hat noch einen oberen Grenzwert, den wir dadurch bestimmen können, daß wir die Nullstellen der Funktion

$$f(z) = \left(4n-(n-1)^2\right)z^2 + 4(n-1)^3 z^4 - 4(n-1)^4 z^6 - 1$$

auswerten. Mit der Abkürzung $\zeta \equiv z^2$ erhalten wir für $n > 1$ eine kubische Gleichung in z^2:

$$4(n-1)^2\zeta^3 - 4(n-1)\zeta^2 + \left(1 - \frac{4n}{(n-1)^2}\right)\zeta + \frac{1}{(n-1)^2} = 0,$$

mit den Koeffizienten

$$a = 4(n-1)^2, \quad b = -4(n-1), \quad c = 1 - \frac{4n}{(n-1)^2}, \quad d = \frac{1}{(n-1)^2}.$$

Die Normalform dieser Gleichung lautet

$$\zeta^3 - \frac{1}{n-1}\zeta^2 + \left(\frac{1}{4(n-1)^2} - \frac{n}{(n-1)^4}\right)\zeta + \frac{1}{4(n-1)^4} = 0$$

mit den Abkürzungen

$$r = -\frac{1}{n-1}, \quad s = \frac{1}{4(n-1)^2} - \frac{n}{(n-1)^4}, \quad t = \frac{1}{4(n-1)^4}.$$

Substituieren wir

$$y = \zeta + \frac{r}{3},$$

gelangen wir zur reduzierten Gleichung

$$y^3 + py + q = 0 \quad \text{mit} \quad p = s - \frac{1}{3}r^2 \quad \text{und} \quad q = \frac{2}{27}r^3 - \frac{1}{3}rs + t.$$

Setzen wir in diese die Koeffizienten *r*, *s* und *t* ein, so ergeben sich die einfacheren Ausdrücke

$$p = -\frac{1}{12(n-1)^2}\left(1 + \frac{12n}{(n-1)^2}\right) \quad \text{und} \quad q = \frac{1}{108(n-1)^3}\left(1 + \frac{27}{n-1} - \frac{36n}{(n-1)^2}\right).$$

Die Determinante ist negativ,

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \frac{1}{36^3}\frac{1}{(n-1)^6}\left[\left(1 + \frac{27}{n-1} - \frac{36n}{(n-1)^2}\right)^2 - \left(1 + \frac{12n}{(n-1)^2}\right)^3\right] < 0,$$

d.h. es gibt drei reelle Lösungen, von denen uns nur der komplexe Hauptzweig interessiert, weil die beiden anderen Lösungen konjugiert komplex zueinander sind:

$$y = 2\sqrt[3]{\rho}\cos(\varphi/3),$$

wobei

$$\rho = \sqrt{-\frac{p^3}{27}} = \sqrt{\frac{1}{36^3}\frac{1}{(n-1)^6}\left(1+\frac{12n}{(n-1)^2}\right)^3}$$

und

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{q}{2\rho}\right) = \arccos\left(\frac{1}{36^3\rho(n-1)^3}\left(\frac{36n}{(n-1)^2}-\frac{27}{n-1}-1\right)\right).$$

Mithin ist

$$z_n = \sqrt{\zeta_n} = \sqrt{y_n + \frac{1}{3}\frac{1}{n-1}}.$$

Die Nulldurchgänge ergeben sich wie in der Zeichnung für $n = 2, 3, 4$ zu

$$\begin{aligned} z_2 &= \sqrt{\zeta_2} = 1{,}366, \\ z_3 &= \sqrt{\zeta_3} = 0{,}809, \\ z_4 &= \sqrt{\zeta_4} = 0{,}6076. \end{aligned}$$

Aus der y-Koordinate folgen für die Winkel zwischen der Geraden durch den Schnittpunkt und den jeweiligen Ursprung des entsprechenden Krümmungskreises und der x-Achse bzw. einer dazu parallelen Geraden im Abstand d_0 die Ausdrücke

$$\varphi_1 = \arcsin\frac{y}{R_1} \quad \text{und} \quad \varphi_2 = \arcsin\frac{d_0 - y}{R_2}.$$

Mit den Beziehungen

$$\frac{y}{R_1} = \sqrt{1-\frac{x^2}{R_1^2}} \quad \text{und} \quad \frac{d_0 - y}{R_2} = \frac{R_1}{R_2}\left(\frac{d_0}{R_1} - \sqrt{1-\frac{x^2}{R_1^2}}\right)$$

ergibt sich

$$\varphi_1 = \arcsin\sqrt{1-\frac{x^2}{R_1^2}} \quad \text{bzw.} \quad \varphi_2 = \arcsin\left[\frac{R_1}{R_2}\left(\frac{d_0}{R_1} - \sqrt{1-\frac{x^2}{R_1^2}}\right)\right].$$

Verwenden wir in diesen Ausdrücken die Abkürzungen $R_2 = nR_1$ und $z = R_1 / d_0$, so folgt weiter

$$\varphi_1 = \arcsin\sqrt{1-\frac{x_n^2}{R_1^2}} \quad \text{bzw.} \quad \varphi_2 = \arcsin\left[\frac{1}{n}\left(\frac{1}{z} - \sqrt{1-\frac{x_n^2}{R_1^2}}\right)\right],$$

wobei

$$\frac{x_n}{R_1} = \frac{1}{1+(n-1)^2 z^2}\left((n-1)^2 z^2 + \sqrt{n - \frac{1}{4z^2}} - \frac{n-1}{2}\right).$$

In der folgenden Tabelle sind die minimalen und maximalen Grenzwinkel sowie der wahrscheinlichste Winkel in Abhängigkeit von der Variablen z angegeben:

n	$z_{\min}$	$\bar{z}$	$z_{\max}$	$\varphi_{1,\min}$	$\overline{\varphi}_1$	$\varphi_{1,\max}$	$\varphi_{2,\max}$	$\overline{\varphi}_2$	$\varphi_{2,\min}$	b_1/b_2
2	0,707	1,08	1,366	35,3°	22,4°	17,6°	24,7°	15,8°	12,4°	0,709
3	0,5	0,66	0,809	45°	33°	26,6°	25,5°	18,9°	15,2°	0,583
4	0,408	0,5	0,608	50,8°	40,2°	32,5°	24,8°	19,8°	16,1°	0,508

In Fällen, wo es darauf ankommt, den Schnittpunkt von jedem Tangentenpunkt aus möglichst schnell zu erreichen, müssen die Variablen n und z so optimiert werden, daß sich ein möglichst günstiges Verhältnis für b_1/b_2 ergibt. Vom Verhältnis der Geschwindigkeiten hängt es ab, für welches n wir in den für uns günstigen Bereich kommen

