

Mathematikaufgabe 76

[Home](#) | [Startseite](#) | [Impressum](#) | [Kontakt](#) | [Gästebuch](#)

Aufgabe: Zeigen Sie, welche Bedingungen gelten müssen, um in einer militärischen Auseinandersetzung als Sieger hervorzugehen. Welche Bedeutung haben dabei neuronale Netze?

Lösung: Krieg ist eine spezielle Form eines Räuber-Beute-Systems, in dem es keine Gewinner, sondern ausschließlich Verlierer gibt. Wir wandeln dazu die Lotka-Volterra-Gleichungen in ein vereinfachtes Differentialgleichungssystem um, weil in der gewählten Konstellation bestimmte Annahmen getroffen werden können.

Sei also N_1 die Populationszahl der Beute und N_2 die der Räuber. Dann gelten, wenn ε_1 die natürliche Reproduktionsrate der Beutepopulation, γ_1 die induzierte Sterberate der Beute pro Räuber, ε_2 die natürliche Sterberate der Räuber und γ_2 die induzierte Wachstumsrate der Räuber pro Beutetier sind, die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= \varepsilon_1 N_1 - \gamma_1 N_2 N_1, \\ \frac{dN_2}{dt} &= \gamma_2 N_1 N_2 - \varepsilon_2 N_2.\end{aligned}$$

Da die natürliche Reproduktion ebenso wie der natürliche Tod bei Kriegshandlungen keine Rolle spielt, setzen wir $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. Da die Räuber in unserem Beispiel nicht von ihrer Beute direkt leben, indem sie sie etwa auffressen, können sie nur eines künstlichen Todes sterben, der ihnen von der Beute zugefügt wird.¹ Sie werden also selbst Beute ihrer Feinde. Durch das negative Vorzeichen werde nun angedeutet, daß $-\gamma_2$ die induzierte Sterberate der Räuber pro Beute angibt, was uns auf folgendes wechselseitiges Räuber-Beute-System führt:

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= -\gamma_1 N_2 N_1 \\ \frac{dN_2}{dt} &= -\gamma_2 N_1 N_2\end{aligned}$$

In diesem definiert sich der Sieger dadurch, daß der Gegner früher ausgeschaltet wird² als er selbst. Ist also eine der beiden Populationszahlen N_1 oder N_2 gleich null geworden, wird die andere nicht weiter verringert. Zu menschlichen Populationen sei angemerkt, daß ein Gegner nur in den seltensten Fällen wirklich ausstirbt oder ausgerottet wird, weil er sich als Schwächerer vorher ergibt und ihm dadurch Gnade zuteil wird, was auch sein Überleben sichert.

Mathematisch gesehen liegt also ein linear entartetes Räuber-Beute-System vor, denn dividieren wir die beiden Gleichungen durcheinander, so erhalten wir Populationsänderungen mit konstanter Steigung, die nicht mehr die typische Form eines mehr oder minder spiralartigen Kurvenverlaufs aufweisen:

¹ Es gibt in der Natur zahlreiche Beispiele, wo der Räuber sich als Verlierer aus dem Kampf zurückzieht.

² Oder aufgibt

$$\frac{dN_2}{dN_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert

$$\int_{N_2(0)}^{N_2(t)} dN_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \int_{N_1(0)}^{N_1(t)} dN_1$$

bzw.

$$N_2(t) = N_2(0) + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} (N_1(t) - N_1(0)).$$

Der Gegner ist besiegt oder³ ausgestorben, wenn $N_2(t) = 0$, d.h. wenn

$$N_2(0) + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} (N_1(t) - N_1(0)) = 0.$$

Der Rest der eigenen Mannschaft beläuft sich dann auf

$$N_1(t) = N_1(0) - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} N_2(0).$$

Es kann auch sein, daß man selbst verloren hat. Dann gilt $N_1(t) = 0$ und vom Gegner haben

$$N_2(t) = N_2(0) - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} N_1(0)$$

Leute die Schlacht überlebt. In jedem Fall aber entscheiden über Sieg oder Niederlage nur vier verschiedene Größen:

- $N_1(0)$ Die Zahl der eigenen Kräfte zu Beginn der Schlacht
- $N_2(0)$ Die Zahl der gegnerischen Kräfte zu Beginn der Schlacht
- γ_1 Die eigene Verlustrate aufgrund der gegnerischen Wirksamkeit
- γ_2 Die gegnerische Verlustrate aufgrund der eigenen Wirksamkeit

Zudem beeinflusst das Verhältnis aus γ_1 und γ_2 , wie schnell sich die Kopffzahlen verringern. Das Verhältnis dieser beiden Verlustraten bewegt sich zwischen 0 und unendlich. Wenn es eins ist, entscheiden über Sieg oder Niederlage nur die Kampfsterken der Truppen. Bei eigener zahlenmäßiger Unterlegenheit bleiben bei gleichzeitig geringer, durch den Gegner induzierter Sterblichkeit γ_1 die eigenen Verluste dennoch gering, wohingegen die des Gegners, wenn deren Verlustrate größer ist, in die Höhe schnellen. Da die zahlenmäßigen Stärken ebenso wie die

³ Biologisch gesprochen

Mathematikaufgabe 76

induzierten Sterberaten beider Gegner positive Zahlen sind, die Ereignisse sich also durchgängig im ersten Quadranten abspielen, können die Verhältnisse auch graphisch gut dargestellt werden.

In Abbildung 1 sind die beiden Optionen Sieg oder Niederlage für ein bestimmtes Kräfteverhältnis $N_1(0)$ zu $N_2(0)$ in Abhängigkeit vom Verhältnis der Sterberaten γ_2 zu γ_1 in ein und demselben Graphen veranschaulicht. Theoretisch gewinnt danach immer der Bessere, der nicht notwendig der zahlenmäßig Überlegene zu sein braucht. Für die Fähigkeit, dem Gegner Verluste beizubringen, ist in der Regel die Überlegenheit der Waffen ausschlaggebend. Waffen sind jedoch definitionsgemäß nur dann überlegen, wenn sie auch eingesetzt werden. Die beste Ausrüstung hilft nichts, wenn man dem Gegner aus irgendwelchen Gründen keine Verluste beibringt. Oftmals liegt daher die Überlegenheit bei dem, der trotz technischer Unterlegenheit seine Waffen rigoros einsetzen. Das macht insbesondere Selbstaufopferungstaktiken immens effektiv. A priori kann also unter Einbeziehung aller Möglichkeiten niemals vorhergesagt werden, wer in einem Treffen der Sieger sein wird, weil der Unterlegene immer Mittel und Wege finden wird, wie er dem „Überlegenen“ Schaden zufügen kann. Daher gibt es bei kriegerischen Auseinandersetzungen trotz aller erdenklichen Siegesoptionen meist nur globale Verlierer.

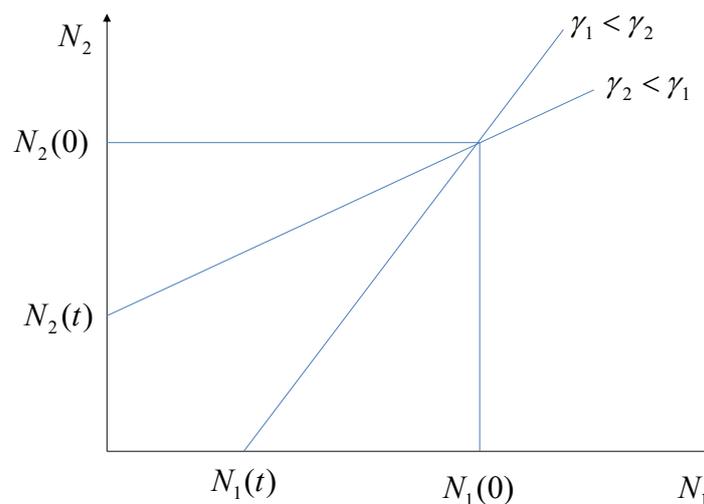


Abbildung 1. Sieg-Niederlage-Kurve

Die Größen N_1 und N_2 haben durchaus abstrakten Charakter. Gerade in modernen militärischen Auseinandersetzungen ist es nicht mehr die Manpower, die kriegsentscheidend ist, sondern es sind die zahlenmäßig gegeneinander aufzuwiegenden beiderseitigen Waffengattungen, die gegeneinander antreten und ausgeschaltet werden müssen. Aufgabe eines neuronalen Netzes kann es daher nur sein, einen konfliktentscheidenden Beitrag zur Ausschaltung der generischen Waffensysteme zu leisten, um einen Kurvenverlauf zu erzwingen, wie er laut obiger Graphik für die eigenen Kräfte günstig ist, d.h. die eigene Letalität muß erhöht und gleichzeitig die Verwundbarkeit der eigenen Systeme so gering wie möglich gehalten werden. Das neuronale Netz muß dazu den Kurvenverlauf laut obiger Abbildung frühzeitig eruieren und die Steigung

Mathematikaufgabe 76

so verändern, daß die eingeleiteten Maßnahmen zur Vernichtung der gegnerischen und zu maximalem Überleben der eigenen Waffensysteme führen. Das wiederum bedeutet, taktische Maßnahmen des Gegners rechtzeitig zu durchschauen und systematisch zu unterlaufen. Das kann nur durch Informationsgewinn von Erfolg gekrönt sein. Der Schlüssel zum Informationsgewinn ist die eigene Sensorik und Kommunikation. Aus den gewonnenen Informationen, die ein sogenanntes Lagebild ergeben, lernt das neuronale Netz schließlich, gegnerische Pläne zu durchkreuzen und eigene Vorteile daraus zu schlagen.