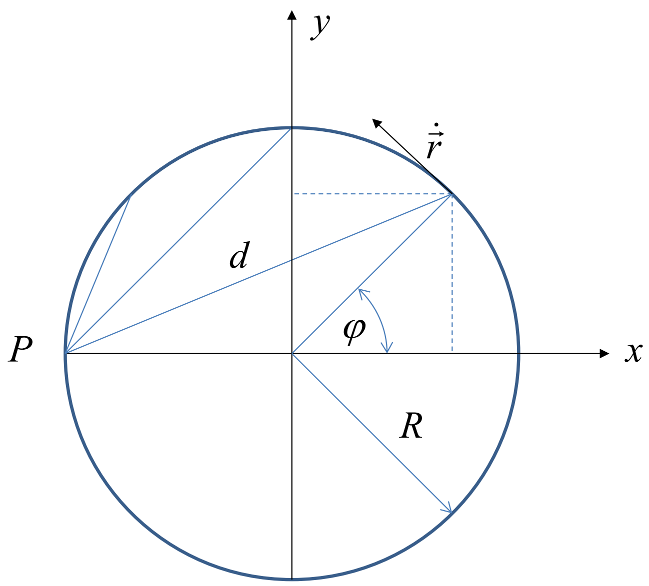
Aufgabe: Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung des Abstands von einem beliebigen Punkt P auf einem Kreis zu einem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit auf diesem Kreis umlaufenden Teilchen.

Lösung: Betrachten wir die folgende Abbildung. Das Teilchen befinde sich auf einer Kreisbahn im Abstand R des Radius vom Mittelpunkt eines kartesischen Koordinatensystems und im Abstand d vom Punkt $P = (-R, 0)$ auf dem Kreis. Seine Bahngeschwindigkeit sei $\dot{\vec{r}}$. Dann ist der Polarwinkel φ proportional zur Zeit t mit der Winkelgeschwindigkeit ω als Proportionalitätskonstante, d.h. $\varphi = \omega \cdot t$.



Die Bewegungsgleichungen der Komponenten des umlaufenden Teilchens lauten:

$$x(t) = R\cos\frac{2\pi t}{T}, \quad y(t) = R\sin\frac{2\pi t}{T}.$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das Teilchen am Ort $x(0) = R$ und $y(0) = 0$. Die Bewegungsgleichung des Abstands vom Punkt zum Teilchen ist dann gegeben durch

$$d(t) = \sqrt{\left(x(t) - x(T/2)\right)^2 + \left(y(t) - y(T/2)\right)^2}.$$

Setzen wir die Koordinaten $x(T/2) = -R$ und $y(T/2) = 0$ zum Zeitpunkt einer halben Umlaufdauer $T/2$, nach der das bewegte Teilchen im gewählten Punkt auftrifft, in diese Gleichung ein, vereinfacht sie sich zu

$$d(t) = \sqrt{\left(x(t) + R\right)^2 + y(t)^2} = \sqrt{x(t)^2 + 2x(t)R + R^2 + y(t)^2} = \sqrt{2}R\sqrt{1 + x(t)/R},$$

da für den Radius stets gilt:

$$R = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}.$$

Setzen wir in diese Abstandsformel die x-Koordinate von oben ein, so erhalten wir die Zeitabhängigkeit der Sekante zu

$$d(t) = \sqrt{2}R\sqrt{1+\cos\frac{2\pi t}{T}}.$$

Damit ist $d(0) = 2R,$ $d(T/4) = \sqrt{2}R$ und $d(T/2) = 0.$ Der Abstand wird also kontinuierlich geringer. Die Geschwindigkeit v längs der Sekante ergibt sich aus der zeitlichen Ableitung zu

$$v(t) = -\frac{\pi}{T}\frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{1+\cos\frac{2\pi t}{T}}}\sin\frac{2\pi t}{T}.$$

Mithin ist $v(0) = 0,$ weil zu diesem Zeitpunkt noch keine Radialkomponente vorhanden ist, und $v(T/4) = -\sqrt{2}\pi R/T$ ist negativ, weil der Abstand geringer wird. Um die Geschwindigkeit $v(T/2)$ berechnen zu können, müssen wir den Ausdruck entsprechend umformen, da wir nicht durch null dividieren dürfen:

$$v(t) = -\frac{\pi}{T}\frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{1-\cos^2\frac{2\pi t}{T}}}\sqrt{1-\cos\frac{2\pi t}{T}}\sin\frac{2\pi t}{T} = -\frac{\sqrt{2}\pi R}{T}\sqrt{1-\cos\frac{2\pi t}{T}}.$$

Wir erhalten $v(T/2) = -2\pi R/T.$ Der Betrag der Geschwindigkeit längs der Sekante wird also kontinuierlich größer, bis der Wert der Umlaufgeschwindigkeit $v = \omega R$ erreicht ist.

Die Beschleunigung berechnen wir aus der zeitlichen Ableitung der Geschwindigkeit:

$$a(t) = -\frac{\pi^2}{T^2}\frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{1-\cos\frac{2\pi t}{T}}}\sin\frac{2\pi t}{T}.$$

Dieser Ausdruck führt für $t = 0$ zu keiner Lösung, weil der Nenner unendlich wird. Also differenzieren wir die alternative Formel für die Geschwindigkeit nach der Produktregel. Wir erhalten

$$a(t) = -\frac{\pi^2}{T^2}\frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{1+\cos\frac{2\pi t}{T}}^3}\left(1+2\cos\frac{2\pi t}{T}+\cos^2\frac{2\pi t}{T}\right) = -\frac{\pi^2}{T^2}\sqrt{2}R\sqrt{1+\cos\frac{2\pi t}{T}}.$$

Mithin ist $a(0) = -2\pi^2 R/T^2,$ $a(T/4) = -\sqrt{2}\pi^2 R/T^2$ und $a(T/2) = 0.$ Der Betrag der Beschleunigung nimmt also von der maximalen Radialbeschleunigung bis auf null ab. Das muß auch so sein, weil die Beschleunigung längs der Tangente allmählich von einer reinen Radial- in eine reine Linearbeschleunigung übergeht, und diese ist bei konstanter Geschwindigkeit null.

Da die Radialbeschleunigung zu Beginn der Bewegung im Abstand R vom Mittelpunkt bei Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit gleich

$$a(0) = -4\pi^2 R / T^2 = -\omega^2 R$$

ist, also proportional zum Abstand R, kann sie auf der gegenüberliegenden Seite des Kreises nur halb so groß sein. Folglich muß dort gelten:

$$a(0) = -\frac{1}{2}\frac{4\pi^2}{T^2} R = -\frac{1}{2}\omega^2 R.$$

Anmerkung: Diese Aufgabe hat eine bestimmte Bewandtnis für das Einüben der menschlichen Treffsicherheit. Stellen Sie sich vor, ein Kind sitzt auf einem Karussell und versucht mit einem Stechwerkzeug in einen aufgehängten Ring zu treffen. Jedesmal, wenn die Stelle mit dem Ring nach einer vollen Umdrehung naht, kommt einem dieser immer schneller entgegen. Das macht einen großen Unterschied zu den Turnierreitern des Mittelalters, wo sich die Lanze dem Gegner mit gleichbleibender Geschwindigkeit nähert, was wesentlich weniger Übung erfordert. Bei zunehmender Geschwindigkeit besteht die Schwierigkeit darin, die Distanz zwischen der Spitze des Stechwerkzeugs und der Mitte des Rings gegen null zu optimieren. Schaut man hingegen nur auf den Ring, kann dies aufgrund der Drehbewegung und des sich ändernden Winkels nicht gelingen, ebenso wie es nicht gelingen kann, nur die Spitze seines Stechwerkzeugs zu beobachten. Am chancenreichsten ist es, die ausgestreckte Hand iterativ, d.h. bei jeder vollen Umdrehung um eine Idee besser, in eine Position zu bringen, die der Ringmitte am nächsten kommt, und den ausgestreckten Arm anschließend gleichlang zu halten, also gar nicht auf die sich dauernd ändernde Distanz zu achten. Das ist eine klassische Aufgabenstellung für ein neuronales Netz, welches lediglich die richtige Armlänge herausfinden muß, damit es mit dem Treffen besser klappt.

