Aufgabe: Gegeben seien die 3 Input-Muster $A \equiv (1, 0, 1)$, $B \equiv (1, 1, 1)$ und $C \equiv (0, 1, 0)$. Diese drei Muster sollen erkannt werden und jeweils eine spezifische Reaktion zur Folge haben. Wenn das Muster A erkannt wird, so soll Output-Neuron 1 „aktiv" sein (den Befehl zum Wegspringen geben), wenn Muster B erkannt wird, so soll Output-Neuron 2 „aktiv" sein (den Befehl zum Angriff geben), und entsprechend soll Output-Neuron 3 „aktiv" sein (den Befehl zum Nichtstun geben), wenn das Muster C erkannt wird. Lösen Sie diese Aufgabe auf Grundlage eines Perceptionsmodells. Nehmen Sie an, daß alle drei Output-Neuronen ein Aktivierungspotential von 0,8 besitzen.

Lösung: In einem Perceptionsmodell ist jedes Neuron der Inputschicht mit jedem Neuron der Output-Schicht verbunden. Jeder einzelne Input wird gewichtet und gelangt so in die Output-Schicht. Seien also die x_i die Elemente der Input-Schicht, die y_i entsprechend die Elemente der Output-Schicht und die a_{ij} die Gewichte der Abbildungsmatrix, so sind Input- und Output-Neuronen durch folgende Abbildung verknüpft:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Das entsprechende lineare Gleichungssystem lautet:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned}$$

Es obliegt nun ganz unserer Intuition, wie wir die Gewichte wählen, um die Aufgabenstellung zu erfüllen. Die folgende Matrix leistet das auf jeden Fall:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ -0{,}3 & 1{,}0 & -0{,}3 \end{pmatrix}.$$

In das lineare Gleichungssystem sind nun der Reihe nach zur Probe die drei Input-Muster einzusetzen:

$$\begin{aligned} y_1 &= 0{,}5x_1 - 0{,}5x_2 + 0{,}5x_3, \\ y_2 &= 0{,}3x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}3x_3, \\ y_3 &= -0{,}3x_1 + 1{,}0x_2 - 0{,}3x_3. \end{aligned}$$

Für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ werden die so erhaltenen Rechengrößen dann in die Boolschen Zahlen 1 oder 0 umgewandelt:

$$\text{if} \quad y_i \geq 0{,}8 \quad \text{then} \quad y_i = 1 \quad \text{else} \quad y_i = 0.$$

Für Muster A erhalten wir

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 + 0 + 0{,}5 \\ 0{,}3 + 0 + 0{,}3 \\ -0{,}3 + 0 - 0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}6 \\ -0{,}6 \end{pmatrix}$$

und als Lösungsvektor entsprechend

$$(y_1,\, y_2,\, y_3) = (1,\, 0,\, 0).$$

Muster B ergibt die Werte

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 - 0{,}5 + 0{,}5 \\ 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}3 \\ -0{,}3 + 1{,}0 - 0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}9 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$$

mit dem Lösungsvektor

$$(y_1,\, y_2,\, y_3) = (0,\, 1,\, 0),$$

und für Muster C erhalten wir schließlich

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0{,}5 + 0 \\ 0 + 0{,}3 + 0 \\ 0 + 1{,}0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}3 \\ 1{,}0 \end{pmatrix}$$

mit dem Lösungsvektor

$$(y_1,\, y_2,\, y_3) = (0,\, 0,\, 1).$$

Man erkennt, daß damit der Aufgabenstellung Genüge getan ist. Mit jedem zusätzlichen Abbildungspunkt wird das Programm aber exponentiell komplizierter.

