

Mathematikaufgabe 71

[Home](#) | [Startseite](#) | [Impressum](#) | [Kontakt](#) | [Gästebuch](#)

Aufgabe: Wie viele Synapsen hätte das menschliche Gehirn, wenn man annimmt, daß jedes Neuron mit jedem andern verschaltet ist? Wie viele Input- und Output-Neuronen hat das Gehirn, wenn die Zahl der Neuronen und Synapsen bekannt ist und jedes Input-Neuron mit jedem Output-Neuron verknüpft ist und umgekehrt?

Lösung: Das menschliche Gehirn besitzt etwa 100 Milliarden Nervenzellen (Neuronen). Sei z die Zahl der Neuronen, dann ist

$$s = \sum_{i=1}^{z-1} i = \frac{z(z-1)}{2}$$

die maximale Zahl der Synapsen. Die Gleichung beweisen wir durch vollständige Induktion. Sie ist für $z=2$ richtig, denn zwei Neuronen können nur eine Synapse haben. Für $z+1$ Neuronen gilt unter der Annahme, daß die obige Gleichung richtig ist:

$$s = \sum_{i=1}^z i = \sum_{i=1}^{z-1} i + z = \frac{z(z-1)}{2} + z = \frac{z^2 - z + 2z}{2} = \frac{(z+1)z}{2}.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. Es können also theoretisch $z = 100 \cdot 10^9 = 10^{11}$ Nervenzellen durch

$$s = \frac{1}{2} 10^{11} \cdot (10^{11} - 1) \approx 5 \cdot 10^{21}$$

Synapsen verknüpft werden. Das ist eine unvorstellbar große Zahl. Tatsächlich ist die Zahl der Synapsen sehr viel geringer, sie beträgt nur etwa 100 Billionen, also $s = 10^{14}$.

Nehmen wir an, daß m Input-Neuronen mit n Output-Neuronen verknüpft sind, so haben wir zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, denn einerseits ist

$$m + n = z$$

und andererseits

$$m \cdot n = s.$$

Setzen wir die zweite Gleichung in die erste ein, beträgt die Zahl der Input-Neuronen

$$m + \frac{s}{m} = z \quad \text{bzw.} \quad m^2 - zm + s = 0.$$

Die quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$m = \frac{z}{2} \pm \sqrt{\frac{z^2}{4} - s},$$

womit

Mathematikaufgabe 71

$$m = \frac{z}{2} + \sqrt{\frac{z^2}{4} - s} \quad \text{und} \quad n = \frac{z}{2} - \sqrt{\frac{z^2}{4} - s}$$

bzw.

$$m = \frac{z}{2} - \sqrt{\frac{z^2}{4} - s} \quad \text{und} \quad n = \frac{z}{2} + \sqrt{\frac{z^2}{4} - s}$$

die beiden Lösungsmengen darstellen. Setzen wir die für das menschliche Gehirn geltenden Zahlen ein, so erhalten wir zwei sehr ungleiche Werte, nämlich

$$m = 99\,999\,999\,000 \quad \text{und} \quad n = 1000$$

oder

$$m = 1000 \quad \text{und} \quad n = 99\,999\,999\,000.$$

Wenn wir annehmen, daß die Zahl der Eingangsgrößen sehr viel größer sein muß als die der Ausgangsgrößen, dann kann eigentlich nur die erste Lösung die richtige sein:

$$m = 99\,999\,999\,000 \quad \text{und} \quad n = 1000.$$

Um auch nur eine einzige brauchbare Ausgangsgröße zu erzeugen, brauchen wir dazu 100 Millionen Eingangsinformationen. Das ist die Anforderung, die wir an künstliche neuronale Netze stellen müssen, damit diese zuverlässig arbeiten und so gut sind wie ein Mensch.