Aufgabe: Berechnen Sie die kürzeste Weglänge in einem zweidimensionalen $(n \times n)$-Gitter, in dem jeder einzelne Gitterwegpunkt angeflogen werden soll und das Flugzeug wieder zu seinem Ausgangspunkt zurückkehren muß. Gibt es eine eindeutige Lösung? Worauf ist zu achten?

Lösung: Sei *a* der Abstand zweier nächster Nachbarn von Gitterpunkten und *n* die eindimensionale Anzahl von Gitterzellen. Dann ist die kürzeste Weglänge l_n gegeben durch

$$l_n = 4a \sum_{i=1}^{(n+1)/2} (2i-1),$$

falls *n* ungeradzahlig ist, und durch

$$l_n = 8a \sum_{i=1}^{n/2} i + \sqrt{2}a,$$

falls *n* geradzahlig ist. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion. Sei *n* zunächst ungeradzahlig. Dann ist

$$l_1 = 4a \sum_{i=1}^{1} 1 = 4a.$$

Wissend, daß die Behauptung für $n = 1$ gilt, zeigen wir unter der Annahme, daß sie allgemein für *n* gilt, daß sie auch für $n+2$ gelten muß. Angenommen, l_n sei die optimale Weglänge im $(n \times n)$-Gitter, dann ist die optimale Weglänge im $((n+2) \times (n+2))$-Gitter im Minimum um den äußeren Gitterumfang länger, da alle Punkte angeflogen werden müssen, d.h.

$$l_{n+2} = l_n + 4(n+2)a.$$

Daraus folgt, daß

$$l_{n+2} = 4a \sum_{i=1}^{(n+1)/2} (2i-1) + 4a\left(2\frac{(n+3)}{2} - 1\right) = 4a \sum_{i=1}^{(n+3)/2} (2i-1),$$

womit der erste Teil der Behauptung bewiesen ist. Den zweiten Teil beweisen wir mit Hilfe des Startwerts (siehe Abb. 1)

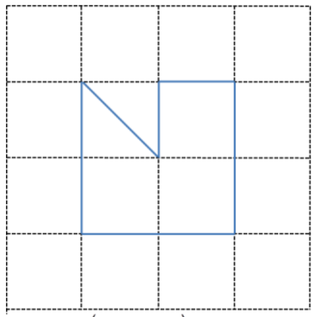
$$l_2 = 8a \sum_{i=1}^{1} i + \sqrt{2}a = \left(8 + \sqrt{2}\right)a.$$

Erneut folgt aus obiger Bedingung $l_{n+2} = l_n + 4(n+2)a$, daß

$$l_{n+2} = 8a \sum_{i=1}^{n/2} i + \sqrt{2}a + 8a\frac{n+2}{2} = 8a \sum_{i=1}^{(n+2)/2} i + \sqrt{2}a,$$

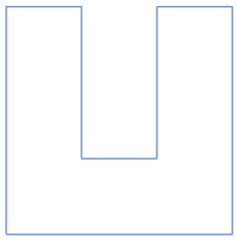
qed

Anmerkung: Die Lösung ist nicht eindeutig. Man erkennt außerdem an den Abb. 2 und 3, daß sich bei mehreren möglichen Trajektorien und steigender Zahl von Gitterzellen der Drehsinn der Kurvenbewegung unterschiedlich oft ändert.



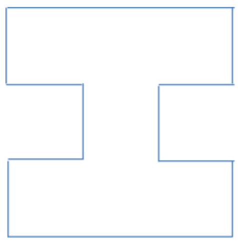
$$l_2 = \left(8+\sqrt{2}\right)a \approx 9{,}4a$$

Abbildung 1. Im 2 x 2-Gitter muß einmal diagonal geflogen werden, um alle Wegpunkte zu erreichen



$$l_3 = \left(4+12\right)a = 16a$$

Abbildung 2. Im 3 x 3-Gitter ändert sich mindesten zweimal der Drehsinn beim Abfliegen



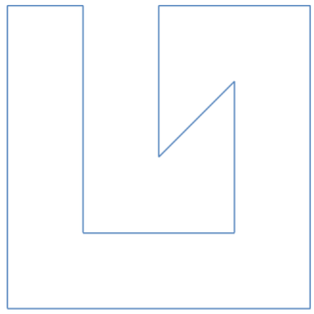
$$l_3 = 16a$$

Abbildung 3. In diesem 3 x 3-Gitter ändert sich der Drehsinn beim Abfliegen viermal

Bei der Optimierung der Weglänge in einem Gitternetz ist darauf zu achten, daß möglichst wenige Wegpunkte diagonal angeflogen werden, weil es dadurch zu unnötigen Verdichtungen des Wegenetzes kommt. Auch muß vermieden werden, daß Wegpunkte mehrfach überflogen werden. Ein schönes Beispiel für eine suboptimale Befliegung bietet Abb. 6. Auch die scheinbar logisch aussehende Befliegung in parallelen Bahnen in Abb. 7 ist suboptimal, da ein weiter

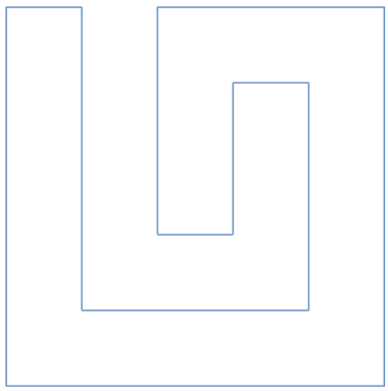
Weg zurück zum Ausgangspunkt geflogen werden muß, der keine neuen Erkenntnisse bringt. Die einfachste und effizienteste Art, ein Gitternetz hermetisch und ohne Wiederholungen abzufliegen, ist die Methode der geschlossenen Trajektorie.

Anstelle einer quadratischen Elementarzelle kann man die Methode natürlich auch auf die dichteste Kreispackung übertragen, bei der die Elementarzelle eine Raute ist.



$$l_4 = \left(8 + 16 + \sqrt{2}\right)a \approx 25{,}4a$$

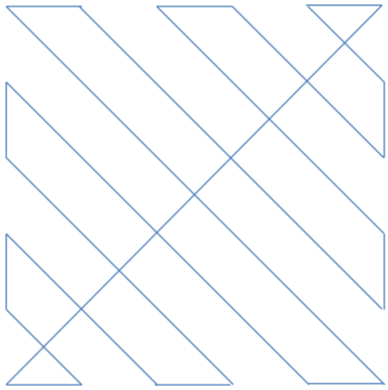
Abbildung 4. Im 4 x 4-Gitter muß einmal diagonal geflogen werden, um alle Wegpunkte zu erreichen



$$l_5 = (4 + 12 + 20)a = 36a$$

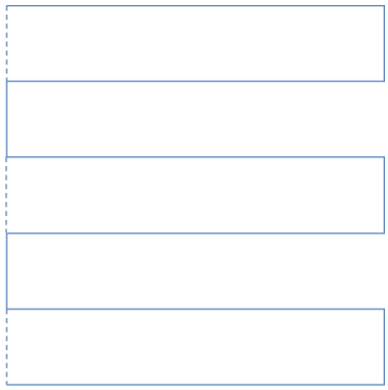
Abbildung 5. Im 5 x 5-Gitter ändert sich mindestens zweimal der Drehsinn beim Abfliegen

Abschließend in Abb. 8 noch ein Beispiel für eine optimale Wegplanung in einem 6×6-Gitter und eine suboptimale Wegplanung in Abb. 9. Die Unterschiede, die sich vor allem im Treibstoffverbrauch auswirken, liegen hier in der Größenordnung von 10 %.



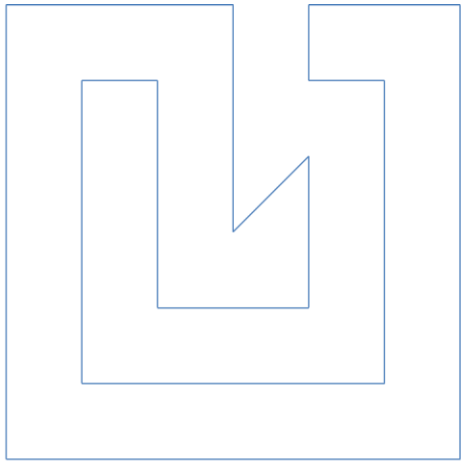
$$l_5 = \left(10 + 30\sqrt{2}\right)a \approx 52{,}4a$$

Abbildung 6. Beispiel für eine suboptimale Befliegung in einem 5 x 5-Gitter



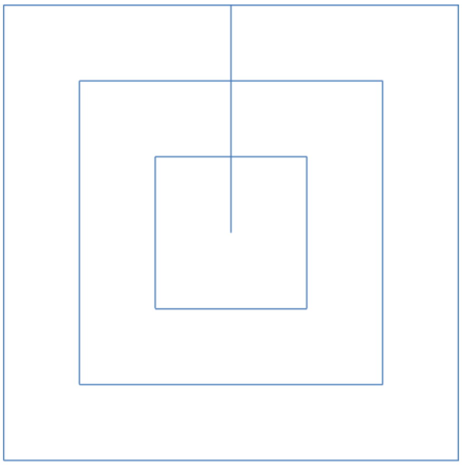
$$l_5 = 40a$$

Abbildung 7. Die scheinbar logische Befliegung in einem 5 x 5-Gitter in parallelen Bahnen ist suboptimal



$$l_6 = \left(8 + 16 + 24 + \sqrt{2}\right)a = \left(48 + \sqrt{2}\right)a \approx 49{,}4a$$

Abbildung 8. Beispiel für eine optimale Wegplanung in einem 6 x 6-Gitter



$$l_6 = (8 + 16 + 24 + 6)a = 54a$$

Abbildung 9. Suboptimale Wegplanung in einem 6 x 6-Gitter