Aufgabe: Finden Sie alle natürlichen Zahlen *x* und *y*, die folgende Gleichung erfüllen:

$$x^3 - y^3 = 721.$$

Lösung: Nach dem binomischen Satz ist

$$(x-y)^3 = \sum_{k=0}^{3} (-1)^k \binom{3}{k} x^{3-k} y^k = \binom{3}{0} x^3 - \binom{3}{1} x^2 y + \binom{3}{2} xy^2 - \binom{3}{3} y^3.$$

Aus

$$\binom{3}{0} = \binom{3}{3} = 1 \quad \text{und} \quad \binom{3}{1} = \binom{3}{2} = 3$$

folgt

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2 y + 3xy^2 - y^3 = x^3 - 3(x-y)xy - y^3.$$

Klammern wir die Differenz $x - y$ aus und dividieren durch sie, erhalten wir eine einfache Hyperbelgleichung, die neben *x* und *y* auch von der ganzzahligen Differenz $x - y$ abhängt:

$$\frac{x^3 - y^3}{x - y} = (x-y)^2 + 3xy = \frac{721}{x - y}.$$

Diese Differenz muß eine natürliche Zahl größer oder gleich Null sein: $x - y = n.$ Damit gilt für die gesuchte Lösungsmenge die Relation

$$y = \frac{1}{3x}\left(\frac{721}{n} - n^2\right) > 0,$$

die wegen $n^3 < 721$ auf Werte kleiner oder gleich 8 beschränkt ist: $n \le 8.$ Von der Folge

$$a_n = \frac{721}{n} - n^2$$

sind nur die Glieder $a_1 = 720$ und $a_7 = 54$ natürliche Zahlen, die durch $3x$ ohne Rest teilbar sind. Zu untersuchen bleiben also nur die beiden Gleichungen

$$y = \frac{a_1}{3x} = \frac{240}{x} \quad \text{und} \quad y = \frac{a_7}{3x} = \frac{18}{x}$$

unter der Nebenbedingung $x > y.$ Das ist nur erfüllt für $x = 9$ und $y = 2$ aufgrund der ersten und für $x = 16$ und $y = 15$ aufgrund der zweiten Gleichung. Die vollständige Lösungsmenge lautet daher $(x, y) \in \{(9, 2), (16, 15)\}.$

Copyright © 2015, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.