Aufgabe: Beweisen Sie, daß unsere Renten nur dann sicher sind[1], wenn die Bevölkerung nicht weiter wächst.

Lösung: Die Populationsstärke P setzt sich zusammen aus erwerbstätigen Verdienern V und Erwerbslosen E, d.h.

$$P = V + E.$$

Genauer gesagt rekrutieren sich die Erwerbslosen E aus Kindern[2] K und Rentnern R, zu denen auch Sozialhilfeempfänger und Arbeitslose zählen:

$$E = K + R.$$

Ändert sich auch nur eine dieser Größen, ist damit automatisch eine weitere zeitabhängig. Man beachte, daß sich eine steigende Kinderzahl auf die Zunahme der Erwerbslosen auswirkt, auch wenn Kinder die Erwerbstätigen von morgen sind. Wenn das Verhältnis von Erwerbslosen zu Verdienern konstant bleiben soll, d.h. $E/V = \text{const}$, dann ist eine solche Bevölkerung gezwungen zu wachsen, sobald die Zahl der Erwerbslosen steigt:

$$P = V\left(1 + \frac{E}{V}\right) \sim V,$$

d.h. aber, es muß entsprechend mehr Verdiener geben. Nun ist aber die Zahl der Kinder proportional zur Zahl der Verdiener V, und nicht proportional zur Populationsgröße P, weil die Kinder der Rentner in der Regel bereits Verdiener sind:

$$K = \gamma V,$$

wobei $\gamma > 0$ die Geburtenrate ist. Wenn also bei konstanter Geburtenrate die Zahl der Rentner wächst, muß die Zahl der Kinder im selben Maße mitwachsen:

$$\frac{E}{V} = \gamma \frac{K + R}{K} = \gamma\left(1 + \frac{R}{K}\right).$$

Daraus folgt

$$P = V\left(1 + \frac{K + R}{V}\right) = V\left(1 + \gamma + \frac{R}{V}\right) = V(1 + \gamma) + R.$$

Soll nun das Verhältnis von Rentnern zu Verdienern R/V konstant bleiben, weil jeder Verdiener nur eine bestimmte Zahl von Rentnern ernähren kann, dann muß die Zahl der Verdiener im selben Maße steigen wie die der Rentner, und zwar unabhängig von der Geburtenrate. Da eine

[1] Sicher heißt hier, daß sich die Höhe der Rentenzahlungen im Vergleich zu heute auch in Zukunft nicht ändern wird.

[2] Im Sinne von unmündig

steigende Population auch zu mehr Rentnern führt, wobei die Ressourcen einer Population begrenzt sind, ist das jedoch keine Lösung. Vielmehr muß die Zahl der Rentner gesenkt werden. Sinkt die Zahl der Rentner, so mag auch die der Verdiener schrumpfen, sie kann aber auch gleich bleiben oder größer werden. Das Heer der Rentner kann allerdings nur verringert werden, wenn gleichzeitig das Renteneintrittsalter angehoben wird, weil sich dann das Verhältnis von Rentnern zu Erwerbstätigen zu Gunsten der Verdiener erniedrigt. Die Populationsgröße muß dabei nicht notwendigerweise schrumpfen. Schrumpft sie dennoch, gilt also

$$\dot{P} = \dot{V}(1+\gamma) + \dot{R} < 0,$$

und nimmt die Zahl der Rentner weiterhin zu, d.h. $\dot{R} > 0,$ dann müßte gelten:

$$0 < \dot{R} < -\dot{V}(1+\gamma),$$

und die Zahl der Verdiener kann bei entsprechendem Geburtenrückgang sogar abnehmen, und zwar absolut gesehen mit der gleichen Rate, mit der die Zahl der Rentner zunimmt, ohne daß eine Gefahr für die Rentenzahlungen im Verzug ist, qed.

Im folgenden nehmen wir lineare Abhängigkeiten an, wobei der allgemeine zeitabhängige Ansatz lautet:

$$P(t) = V(t) + K(t) + R(t) = P_0 + \dot{P}t,$$

und die charakteristischen Größen folgenden Verlauf haben:

$$\begin{aligned} V(t) &= V_0 + \dot{V}t, \\ K(t) &= K_0 + \dot{K}t, \\ R(t) &= R_0 + \dot{R}t. \end{aligned}$$

Setzen wir diese zeitabhängigen Größen in obigen Ausdruck ein, so erhalten wir

$$P(t) = V_0 + K_0 + R_0 + (\dot{V} + \dot{K} + \dot{R})t.$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt

$$P_0 = V_0 + K_0 + R_0 \quad \text{und} \quad \dot{P} = \dot{V} + \dot{K} + \dot{R}.$$

Im Falle $\dot{V} = -\dot{R}$ und $\dot{K} = \gamma\dot{V}$ hätten wir dann

$$P(t) = P_0 - \gamma\dot{R}t \quad \text{mit} \quad \dot{P} = -\gamma\dot{R}$$

und die obigen Zeitfunktionen lauten

$$\begin{aligned} V(t) &= V_0 - \dot{R}t, \\ K(t) &= K_0 - \gamma\dot{R}t, \\ R(t) &= R_0 + \dot{R}t. \end{aligned}$$

Wenn das Verhältnis

$$\frac{E(t)}{V(t)} = \frac{P_0 - V_0 - (\gamma - 1)\dot{R}t}{V_0 - \dot{R}t} = \text{const}$$

zeitunabhängig sein soll und wir die Konstante ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich Eins setzen, dann muß die Nebenbedingung $\gamma = 2$ gelten, d.h. es muß doppelt so viele Kinder wie Verdiener geben, und die Population muß zum Zeitpunkt $t = 0$ ebenfalls doppelt so groß sein wie die Zahl der Verdiener, d.h. $P_0 = 2V_0$. Bei einem anderen Verhältnis als 1 ändern sich die Verhältnisse entsprechend. Schwierig wird es nur, wenn die Bevölkerung wächst und gleichzeitig eine Rezession eintritt, weil dann

$$\dot{P} = \dot{V}(1 + \gamma) + \dot{R} > 0.$$

Umgeformt heißt das:

$$\dot{R} > -\dot{V}(1 + \gamma),$$

und die Zahl der Verdiener darf keinesfalls mit der gleichen oder einer größeren Rate abnehmen, mit der die der Rentner zunimmt, weil sonst

$$1 > 1 + \gamma$$

zum Widerspruch führt und damit zu den oben aufgezeigten Schwierigkeiten.