Aufgabe: Berechnen Sie die zeitabhängigen Lösungen der Lotka-Volterra-Gleichungen numerisch.

Lösung: Die gekoppelten Lotka-Volterra-Gleichungen lauten in ihrer ursprünglichen Form

$$\frac{dN_1}{dt} = \varepsilon_1 N_1 - \gamma_1 N_1 N_2, \qquad \frac{dN_2}{dt} = \gamma_2 N_1 N_2 - \varepsilon_2 N_2.$$

Für den Gleichgewichtspunkt mit waagrechten Tangenten gilt

$$\varepsilon_1 = \gamma_1 N_2^*, \qquad \varepsilon_2 = \gamma_2 N_1^*.$$

Damit formen wir die beiden Ausdrücke wie folgt um:

$$\frac{dN_1}{N_1} = -\gamma_1 \left(N_2 - N_2^*\right) dt, \qquad \frac{dN_2}{N_2} = \gamma_2 \left(N_1 - N_1^*\right) dt$$

und integrieren die beiden Gleichungen

$$\int_{N_1(0)}^{N_1} \frac{dN_1}{N_1} = -\gamma_1 \int_0^t \left(N_2(t) - N_2^*\right) dt, \qquad \int_{N_2(0)}^{N_2} \frac{dN_2}{N_2} = \gamma_2 \int_0^t \left(N_1(t) - N_1^*\right) dt,$$

von denen nur die linken Seiten exakt lösbar sind. Nach beiden Variablen aufgelöst sind die Lösungen gegeben durch

$$N_1(t) = N_1(0) \exp\left(-\gamma_1 \int_0^t \left(N_2(t) - N_2^*\right) dt \right), \qquad N_2(t) = N_2(0) \exp\left(\gamma_2 \int_0^t \left(N_1(t) - N_1^*\right) dt \right).$$

Definieren wir für $t_n = t_{n-1} + \Delta t$ eine Iterationsfolge, so läßt sich das Integral wie folgt zerlegen:

$$N_1(t_n) = N_1(0) \exp\left(-\gamma_1 \sum_{i=1}^{n} \left(N_2(t_{i-1}) - N_2^*\right) \Delta t \right), \quad N_2(t_n) = N_2(0) \exp\left(\gamma_2 \sum_{i=1}^{n} \left(N_1(t_{i-1}) - N_1^*\right) \Delta t \right).$$

Es ist also

$$N_1(t_1) = N_1(0) \exp\left(-\gamma_1 \left(N_2(t_0) - N_2^*\right) \Delta t \right), \quad N_2(t_1) = N_2(0) \exp\left(\gamma_2 \left(N_1(t_0) - N_1^*\right) \Delta t \right)$$

und rekursiv

$$N_1(t_2) = N_1(0) \exp\left(-\gamma_1 \left(N_2(t_0) - N_2^* + N_2(t_1) - N_2^*\right) \Delta t \right) = N_1(t_1) \exp\left(-\gamma_1 \left(N_2(t_1) - N_2^*\right) \Delta t \right),$$
$$N_2(t_2) = N_2(0) \exp\left(\gamma_2 \left(N_1(t_0) - N_1^* + N_1(t_1) - N_1^*\right) \Delta t \right) = N_2(t_1) \exp\left(\gamma_2 \left(N_1(t_1) - N_1^*\right) \Delta t \right)$$

bzw.

$$
\begin{aligned}
N_1(t_3) &= N_1(0)\exp\left(-\gamma_1\left(N_2(t_0)-N_2^* + N_2(t_1)-N_2^* + N_2(t_2)-N_2^*\right)\Delta t\right)\\
&= N_1(t_2)\exp\left(-\gamma_1\left(N_2(t_2)-N_2^*\right)\Delta t\right),\\
N_2(t_3) &= N_2(0)\exp\left(\gamma_2\left(N_1(t_0)-N_1^* + N_1(t_1)-N_1^* + N_1(t_2)-N_1^*\right)\Delta t\right)\\
&= N_2(t_2)\exp\left(\gamma_2\left(N_1(t_2)-N_1^*\right)\Delta t\right)
\end{aligned}
$$

usw. Allgemein gilt

$$
\begin{aligned}
N_1(t_n) &= N_1(t_{n-1})\exp\left(-\gamma_1\left(N_2(t_{n-1})-N_2^*\right)\Delta t\right),\\
N_2(t_n) &= N_2(t_{n-1})\exp\left(\gamma_2\left(N_1(t_{n-1})-N_1^*\right)\Delta t\right)
\end{aligned}
$$

für $t_n = t_0 + n\Delta t$. In übersichtlicher Matrixschreibweise haben wir

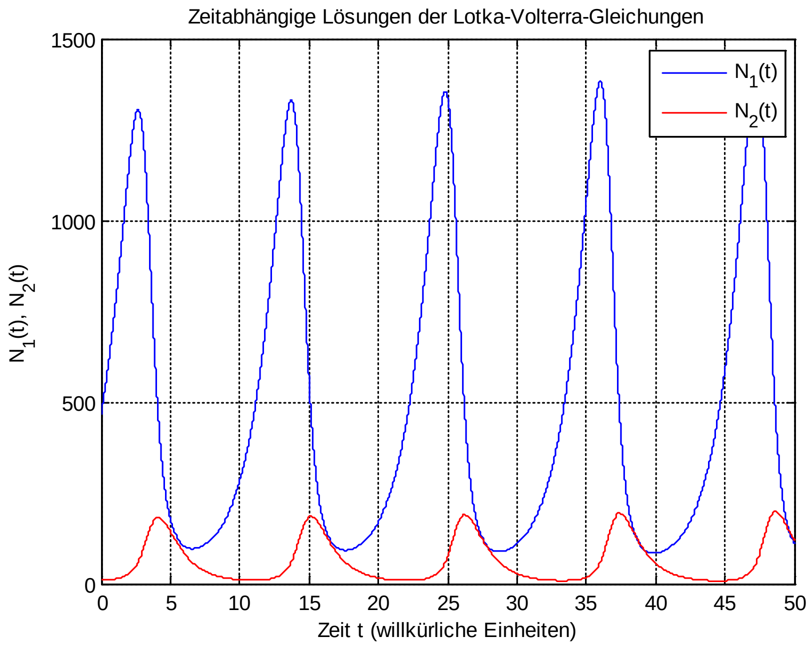
$$
\begin{pmatrix} N_1(t_n) \\ N_2(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp\left(-\gamma_1\left(N_2(t_{n-1})-N_2^*\right)\Delta t\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(\gamma_2\left(N_1(t_{n-1})-N_1^*\right)\Delta t\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1(t_n) \\ N_2(t_n) \end{pmatrix}.
$$

Sind zudem die maximalen oder minimalen Populationsgrößen bekannt, läßt sich noch das Verhältnis

$$
\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{N_2^{\max} - N_2^* - N_2^* \ln N_2^{\max} + N_2^* \ln N_2^*}{N_1^{\max} - N_1^* - N_1^* \ln N_1^{\max} + N_1^* \ln N_1^*} = \frac{N_2^* - N_2^{\min} - N_2^* \ln N_2^* + N_2^* \ln N_2^{\min}}{N_1^* - N_1^{\min} - N_1^* \ln N_1^* + N_1^* \ln N_1^{\min}}
$$

bestimmen, so daß die Iterationsgleichungen nur noch von der einzigen Rate γ_1 abhängen. Wenn die maximalen und minimalen Populationsgrößen bekannt sind, können die Gleichgewichtspunkte theoretisch berechnet werden:

$$
N_1^* = \frac{N_1^{\max} - N_1^{\min}}{\ln N_1^{\max} - \ln N_1^{\min}}, \qquad N_2^* = \frac{N_2^{\max} - N_2^{\min}}{\ln N_2^{\max} - \ln N_2^{\min}}.
$$




```
% Zeitabhängige Lösungen der Lotka-Volterra-Gleichungen

clear all

max = 5000;

xmin = 100;
xmax = 1300;
ymin = 10;
ymax = 180;

N1p = round(xmax-xmin)/(log(xmax)-log(xmin))
N2p = round(ymax-ymin)/(log(ymax)-log(ymin))
gamma21 = (ymax-N2p-N2p*log(ymax/N2p))/(xmax-N1p-N1p*log(xmax/N1p))

Deltat = 0.01;
t0 = 0;
gamma1 =0.01;

% Phasen I & II
t(1) = t0;
N1(1) = N1p;
N2(1) = ymin;

for n = 1:max+1
    t(n+1) = t(n)+Deltat;
    N1(n+1) = N1(n)*exp(-gamma1*(N2(n)-N2p)*Deltat);
    N2(n+1) = N2(n)*exp(gamma21*gamma1*(N1(n)-N1p)*Deltat);
end

plot(t,N1,'b')
hold on
plot(t,N2,'r')
grid on
xlabel ('Zeit t (willkürliche Einheiten)');
ylabel('N_1(t), N_2(t)');
title('Zeitabhängige Lösungen der Lotka-Volterra-Gleichungen');
legend('N_1(t)','N_2(t)');
xlim([0 50])
ylim([0 1500])
```