Aufgabe: Zwei Bauern wollen ihren Wald nach der profitabelsten Weise abholzen. Bauer 1 holzt seinen Wald nach der Zeit t_1 ab, Bauer 2 läßt sich doppelt soviel Zeit. Wer hat am Ende die größere Holzmenge und macht das bessere Geschäft?

Lösung: Sei

$$V = \pi r^2 z$$

das Volumen eines Baumes, r der Stammdurchmesser und z die Höhe. Um das Holzwachstum zu berechnen, benötigen wir die Ableitung des Volumens nach der Zeit. Nach der Produktregel gilt:

$$\dot{V} = 2\pi r\dot{r}z + \pi r^2\dot{z}.$$

Wir nehmen an, daß das Holzwachstum linear verläuft und Holz in jeder Raumrichtung gleich schnell wächst:

$$r = \dot{r}t, \qquad z = \dot{z}t.$$

Damit folgt für die Ableitung

$$\dot{V} = 2\pi\dot{r}^2\dot{z}t^2 + \pi\dot{r}^2\dot{z}t^2 = 3\pi\dot{r}^2\dot{z}t^2.$$

Das Volumen erhalten wir durch zeitliche Integration

$$V = \int_0^V dV = 3\pi\dot{r}^2\dot{z}\int_0^t t^2 dt = \pi\dot{r}^2\dot{z}t^3.$$

Wir nehmen an, daß ein doppelt so hoher Baum viermal so viel Grundfläche braucht wie ein Baum einfacher Höhe. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit vergleichen wir nur einen Baum doppelter Höhe mit vier Bäumen einfacher Höhe, stellvertretend für den gesamten Wald, da es uns nur auf den Vergleich ankommt. Bauer 1 erntet nach der Zeit t_1 und erzielt pro Baum ein Holzvolumen $V_1 = \pi\dot{r}^2\dot{z}t_1^3$. Bauer 2 erntet nach der Zeit $t_2 = 2t_1$ und erzielt damit ein Holzvolumen $V_2 = 8\pi\dot{r}^2\dot{z}t_1^3$. Da der Bauer 1 aber nach der halben Zeit 4 Bäume schlägt und in derselben Zeit, die Bauer 2 für eine Ernte benötigt, zweimal erntet, also insgesamt 8 Bäume gefällt hat, gilt $V_2 = V_1$. Die Holzmasse bleibt also erhalten, sie hat weder ab- noch zugenommen. Es ist also egal, wie oft der Wald abgeholzt wird, wenn wiederaufgeforstet wird und die zeitlichen Perioden des Holzfällens gewahrt bleiben, was nicht immer gewährleistet ist. Ein Wald, der jeden Tag abgeholzt wird, existiert schlichtweg nicht mehr.