Aufgabe: Beweisen Sie, daß unser Rentensystem ein Räuber-Beute-System darstellt und diskutieren Sie es.

Beweis: Sei N_A die Zahl der Beitragszahler und N_B die Zahl der Rentenempfänger. Ferner sei A die durchschnittliche Höhe des Rentenbeitrags pro Einzahler und B die Höhe an ausgeschütteter Rente je Rentenempfänger. Dann beläuft sich die Gesamtsumme der eingezahlten Rentenbeiträge im Abrechnungszeitraum auf AN_A Währungseinheiten. Dem stehen BN_B Rentenausgaben gegenüber. In einem gesunden Rentensystem müssen sich diese beiden Größen gegenseitig aufwiegen:

$$AN_A = BN_B,$$

sonst entstehen Löcher in der Rentenkasse, die durch andere Steuern oder Kredite gegenfinanziert werden müssen. Es können theoretisch auch Überschüsse erwirtschaftet werden, was allerdings nur selten der Fall ist, da die Zahl der Rentner naturgemäß steigt. Derjenige, dessen Situation sich dadurch primär verschlechtert, sei definitionsgemäß das Beutelebewesen, und das ist in unserem Fall der Beitragszahler. Damit verbleibt dem Rentner, d.h. dem Zahlungsempfänger, nur die Rolle des Räubers.

Im allgemeinen werden alle vier Größen in obiger Bilanzgleichung variabel sein, so daß sich deren zeitliche Ableitung

$$A\frac{dN_A}{dt} + N_A\frac{dA}{dt} = B\frac{dN_B}{dt} + N_B\frac{dB}{dt}$$

aus der Produktregel ergibt. In der üblichen Kurznotation schreiben wir

$$A\dot{N}_A + N_A\dot{A} = B\dot{N}_B + N_B\dot{B}.$$

Darin sind $\dot{A}$ die Beitrags- und $\dot{B}$ die Rentenanpassungen. Die Rentenbeiträge werden gemäß unseren Annahmen in der Regel steigen ($\dot{A} > 0$), die Rentenerhöhungen hingegen sinken ($\dot{B} < 0$). Ebenso wird sich die Zahl der Beitragszahler mit der Rate $\alpha < 0$ erniedrigen, während sich gleichzeitig aus Überalterungsgründen die der Rentner $\beta > 0$ erhöht. In jedem Fall können die Schmälerungen oder Zuwächse durch eine Exponentialfunktion der Gestalt

$$\dot{N}_A = \alpha N_A \quad \text{und} \quad \dot{N}_B = \beta N_B$$

ausgedrückt werden. Definieren wir nun für einen gewissen Zeitraum feste Größen für die Beitragszahlungen A und Ausschüttungen B, so ändern sich in dieser Zeit nur die Gesamtzahlen der Beitragspflichtigen N_A und Bezieher N_B, was ausschließlich von Schwund und Wachstum (α, β) sowie dem Arbeitsmarkt und von den jeweiligen Ruhestandsregelungen abhängt ($\dot{A}, \dot{B}$). Klar ist, daß wenn entweder die Zahl der Rentner zu- und gleichzeitig die der Beitragszahler abnimmt, sich die Beiträge erhöhen und/oder die Rentenausschüttungen verringern werden, da sonst die obige Bilanzgleichung nicht mehr erfüllt wäre. Damit können wir die Ableitung unserer Gleichung einmal nach der Beute- und zum andern nach der Räuberpopulation auflösen und die beiden Exponentialfunktionen einsetzen:

$$\dot{N}_A \equiv \frac{B}{A}\beta N_B + \frac{\dot{B}}{A}N_B - \frac{\dot{A}}{A}N_A,$$
$$\dot{N}_B \equiv \frac{A}{B}\alpha N_A + \frac{\dot{A}}{B}N_A - \frac{\dot{B}}{B}N_B.$$

Nach entsprechender Umformung und Variablensubstitution erhalten wir

$$\dot{N}_A \equiv \left(\beta + \frac{\dot{B}}{B}\right)N_A - \frac{\dot{A}}{AN_B}N_A N_B,$$
$$\dot{N}_B \equiv \left(\alpha + \frac{\dot{A}}{A}\right)N_B - \frac{\dot{B}}{BN_A}N_A N_B.$$

Lösen wir dieses System wie folgt auf:

$$A\dot{N}_A + \dot{A}N_A = \left(\beta + \frac{\dot{B}}{B}\right)AN_A,$$
$$B\dot{N}_B + \dot{B}N_B = \left(\alpha + \frac{\dot{A}}{A}\right)BN_B,$$

und setzen die beiden Ausdrücke gleich, ergibt sich mittels unserer Bilanzgleichung die Identität

$$\alpha + \frac{\dot{A}}{A} = \beta + \frac{\dot{B}}{B}.$$

Das obige Differentialgleichungssystem formen wir weiter um:

$$\dot{N}_A \equiv \beta N_A - \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B}\right)\frac{1}{N_B}N_A N_B,$$
$$\dot{N}_B \equiv \alpha N_B + \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B}\right)\frac{1}{N_A}N_A N_B.$$

Entsprechend den Festsetzungen

$$\varepsilon_A \equiv \beta > 0, \quad \gamma_A \equiv \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B}\right)\frac{1}{N_B} > 0$$

und

$$\varepsilon_B \equiv -\alpha > 0, \quad \gamma_B \equiv \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B}\right)\frac{1}{N_A} > 0$$

erhalten wir so die charakteristischen Lotka-Volterra-Gleichungen eines Räuber-Beute-Systems:

$$\dot{N}_A = \varepsilon_A N_A - \gamma_A N_A N_B,$$
$$\dot{N}_B = -\varepsilon_B N_B + \gamma_B N_A N_B.$$

Darin ist ε_A die Reproduktionsrate der Beitragszahler ohne Störung und γ_A die auf einen Rentner bezogene Sterberate der Beitragszahler aufgrund höherer Beiträge.[1] Die Größe ε_B ist die Sterberate der Rentner aufgrund rückläufiger Beitragszahler[2] und γ_B die Zuwachsrate der Rentner aufgrund gestiegener Rentenbeiträge. Wir sehen, daß $\dot{A}$ positiv sein sollte, d.h. die Rentenbeiträge erhöht werden sollten, und $\dot{B}$ negativ, d.h. die Renten gekürzt werden müssen, um das System aufrechtzuerhalten. Die Beitragszahler sind also als Beutevertreter klarerweise Verlierer, ihre Zahl nimmt zum einen kontinuierlich ab, andererseits haben sie immer höhere Versicherungsbeiträge zu entrichten. Auf der anderen Seite sind die Rentner als die Räuber auch keine absoluten Gewinner, da sie durch ihre zahlenmäßige Zunahme immer geringere Rentenzahlungen bekommen. Da das Rentensystem künstlich gestützt wird, ist es so lange kein natürliches Räuber-Beute-System, solange anderweitig Einfluß genommen werden kann. Es kann allerdings auch nur so lange aufrechterhalten werden, wie Einzahler da sind und weitere Beitragserhöhungen möglich sind,

qed

[1] Nicht zu wörtlich genommen der Rückgang von Beitragszahlern

[2] Nicht zu wörtlich gemeint sind das Rentner, die nicht mehr dem staatlichen Rentensystem zur Last fallen