Aufgabe:

a) Ein Würfel habe die Seitenlänge *d*, ein Quader gleich großen Volumens die Seitenlängen $a = b$ und $c > a$. Zeigen Sie, daß das Verhältnis von Oberfläche zu Volumen beim Würfel kleiner ist als beim Quader.

b) Ein Kugel habe den Radius *r*, ein Rotationsellipsoid gleich großen Volumens die Halbachsen $a = b$ und $c > a$. Zeigen Sie, daß das Verhältnis von Oberfläche zu Volumen bei der Kugel kleiner ist als beim Ellipsoid.

Lösung:

a) Für einen Würfel der Kantenlänge *a* gelten für Volumen *V* und Oberfläche *A* die bekannten Relationen

$$V_W = a^3$$
$$A_W = 6a^2$$

wobei wir zur Unterscheidung von anderen Körpern noch den Index *W* hinzugefügt haben.

Bei einem Quader mit drei unterschiedlichen Seitenlängen a, b und c hingegen berechnen sich diese Größen wir folgt:

$$V_Q = abc$$
$$A_Q = 2ab + 2bc + 2ca$$

Dabei haben wir zur Unterscheidung vom Würfel den Index Q verwendet. Im Falle $a = b = c$ folgen daraus die Relationen für den Würfel.

Bei Volumengleichheit von Quader und Würfel müssen wir die Kantenlänge *a* des Quaders von der des Würfels unterscheiden und dazu eine neue Variable *d* einführen, so daß gilt:

$$d^3 = abc$$

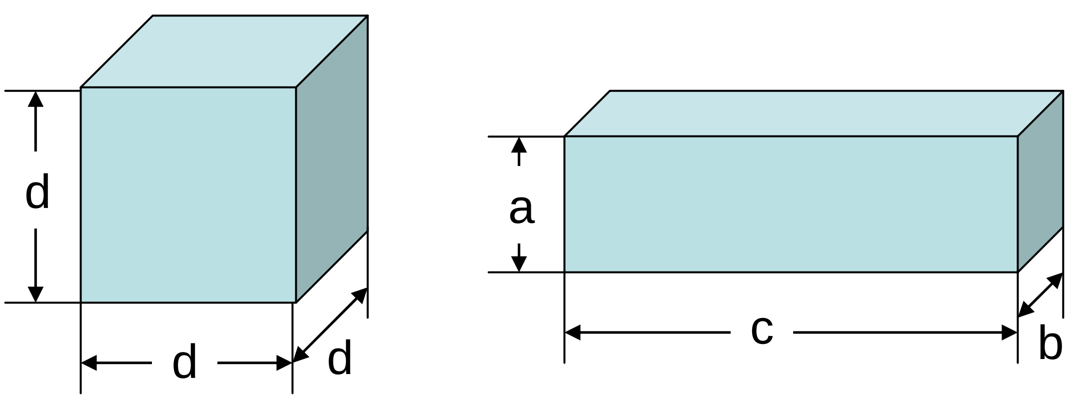

Abbildung 1: Der Würfel als Spezialfall eines Quaders mit minimaler Oberfläche

Lösen wir diese Gleichung nach *c* auf, so erhalten wir für die Oberfläche des Quaders den Ausdruck:

$$A_Q = 2ab + \frac{2d^3}{a} + \frac{2d^3}{b},$$

wobei *d* als konstant angenommen wird. Für die Bestimmung der Extremwerte müssen wir nun die partiellen Ableitungen nach *a* und *b* gleich Null setzen:

$$\frac{\partial A_Q}{\partial a} = 2b - \frac{2d^3}{a^2} = 0$$
$$\frac{\partial A_Q}{\partial b} = 2a - \frac{2d^3}{b^2} = 0$$

Daraus folgt als Lösung sofort $a = b = d$. Die 2. partiellen Ableitungen lauten:

$$\frac{\partial^2 A_Q}{\partial a^2} = \frac{4d^3}{a^3} \qquad \frac{\partial^2 A_Q}{\partial b \partial a} = 2$$
$$\frac{\partial^2 A_Q}{\partial a \partial b} = 2 \qquad \frac{\partial^2 A_Q}{\partial b^2} = \frac{4d^3}{b^3}$$

Die Determinante der 2. partiellen Ableitungen an der Stelle des Extremwerts liefert einen Wert größer Null, und zwar folgt

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 A_Q}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 A_Q}{\partial b \partial a} \\ \frac{\partial^2 A_Q}{\partial a \partial b} & \frac{\partial^2 A_Q}{\partial b^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{4d^3}{a^3} & 2 \\ 2 & \frac{4d^3}{b^3} \end{vmatrix} = 16\frac{d^6}{a^3 b^3} - 4 = 12 > 0\,.$$

Für $a = b = d$ hat also die Quaderoberfläche ein relatives Minimum. Bei gleichem Volumen von Würfel und Quader besitzt also der Würfel die kleinste Oberfläche, was zu beweisen war. Die nachfolgende Abbildung zeigt (ohne Angabe von Einheiten) die Abhängigkeit der Quaderoberfläche von der Kantenlänge *a* für den Fall, daß $a = b$ und $d = 5$ ist.

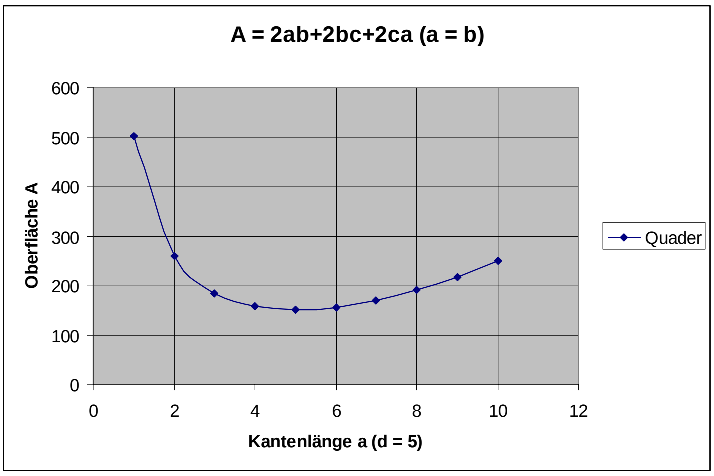

Abbildung 2: Quaderoberfläche als Funktion der Kantenlänge

b) Für eine Kugel lauten die entsprechenden Berechnungsformeln für Volumen und Oberfläche

$$V_K = \frac{4\pi}{3} r^3$$
$$A_K = 4\pi r^2$$

wobei der Index *K* angeben soll, daß es sich um eine Kugel handelt.

Das Volumen eines Ellipsoids mit den Halbachsen *a*, *b* und *c* bestimmen wir allgemein zu

$$V_E = \frac{4\pi}{3} abc \, ,$$

während sich die Oberfläche nur mit Hilfe von analytisch nicht lösbaren elliptischen Integralen ausdrücken läßt.

Im Spezialfall eines verlängerten (prolaten) Rotationsellipsoids ($a = b$) sind diese Integrale jedoch analytisch lösbar und wir erhalten für Volumen und Oberfläche die Ausdrücke

$$V_E = \frac{4\pi}{3} a^2 c$$
$$A_E = 2\pi a^2 \left(1 + \frac{c}{a} \frac{\arcsin \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}} \right)$$

wobei der Index *E* wiederum andeuten soll, daß das Ellipsoid gemeint ist.

Bei gleichen Volumen von Kugel und Ellipsoid $V_K = V_E$ finden wir die Relation

$$r^3 = a^2 c \, .$$

Wir nehmen im folgenden an, daß die beiden Halbachsen sich nicht groß unterscheiden, so daß wir für den Arkussinus die Näherungsformel

$$\arcsin x \cong x + \frac{1}{6} x^3$$

verwenden können. Damit folgt

$$\frac{\arcsin x}{x} \cong 1 + \frac{1}{6} x^2 = 1 + \frac{1}{6} \left(1 - \frac{a^2}{c^2} \right) .$$

Dies liefert näherungsweise die Oberfläche unseres Rotationsellipsoids zu

$$A_E = 2\pi a^2\left\{1+\frac{c}{a}+\frac{1}{6}\left(\frac{c}{a}-\frac{a}{c}\right)\right\}.$$

Durch Substitution der Volumenäquivalenzrelation folgt weiter der Ausdruck

$$A_E = 2\pi a^2\left\{1+\frac{r^3}{a^3}+\frac{1}{6}\left(\frac{r^3}{a^3}-\frac{a^3}{r^3}\right)\right\} = 2\pi\left\{a^2+\frac{7}{6}\frac{r^3}{a}-\frac{1}{6}\frac{a^5}{r^3}\right\},$$

der nur noch von der Variablen *a* abhängt, da wir *r* als fest vorgegeben, d.h. konstant annehmen. Zur Extremwertbestimmung differenzieren wir den Ausdruck und erhalten

$$A_E' = 2\pi\left\{2a-\frac{7}{6}\frac{r^3}{a^2}-\frac{5}{6}\frac{a^4}{r^3}\right\} = 0.$$

Diese Gleichung wird gelöst durch $a = r$. Damit ergibt die 2. Ableitung ein relatives Minimum für die Kugeloberfläche:

$$A_E'' = 2\pi\left\{2+\frac{14}{6}\frac{r^3}{a^3}-\frac{20}{6}\frac{a^3}{r^3}\right\} = 1 > 0.$$

Die Kugel besitzt also unter sämtlichen verlängerten Rotationsellipsoiden gleichen Volumens die geringste Oberfläche, was zu beweisen war.

Symmetrische Formen scheinen also in der Natur eine Art Potentialminimum zu repräsentieren, das zunächst unabhängig ist von der Art der spezifischen Form. Alle natürlichen Körper streben diesem Potentialminimum zu. Wir erkennen darin eine Art Formentropie, bei der der symmetrische und stabilste Zustand zugleich der wahrscheinlichste ist.