Aufgabe: Beweisen Sie, daß zunehmende Armut erst durch Wachstum entsteht?

Beweis: Wir nehmen an, daß Arm und Reich ein symbiotisches Räuber-Beute-System beschreiben, bei dem die Reichen die Armen ausbeuten und immer reicher werden, während die Besitzlosen (wie im Kapitalismus) zunehmend verarmen, oder umgekehrt die Armen die Räuber sind und den Reichen (wie im Sozialismus) alles wegnehmen. Nachfolgend zeigen wir, daß das spezifische Räuber-Beute-System »Arm und Reich« ohne Wachstum in einer Singularität verharrt, wo weder Arm noch Reich jeweils zu- oder abnehmen können. Interne Übergänge sind jedoch möglich und auch zulässig. Sei also N_1 die Zahl der Reichen und N_2 die Zahl der Armen. Dann lauten die Lotka-Volterra-Gleichungen, welche unser Räuber-Beute-System beschreiben:

$$\dot{N}_1 = k_1 N_1 - k_{12} N_1 N_2,$$
$$\dot{N}_2 = k_{21} N_1 N_2 - k_2 N_2,$$

wobei k_1 der natürliche Zuwachs an Reichen (ohne Wechselwirkung mit den Armen) ist und k_2 der natürliche Schwund an Armen, k_{12} der Rückgang der Reichen aufgrund einer Wechselwirkung mit den Armen und k_{21} der Zuwachs der Armen aufgrund einer Wechselwirkung mit den Reichen. Es kann also jemand entweder zu den Reichen oder zu den Armen gehören, wo die genaue Grenze zwischen beiden liegt, ist für die Aufgabenstellung irrelevant. Die Gesamtzahl an Reichen und Armen bleibe jedenfalls im betrachteten Zeitraum konstant, d.h. im wachstumsfreien Zustand gelte

$$N_1 + N_2 = N_0.$$

Damit muß automatisch die Ableitung gleich null sein:

$$\dot{N}_1 + \dot{N}_2 = 0.$$

Somit können wir die beiden Räuber-Beute-Gleichungen addieren und null setzen:

$$k_1 N_1 - k_2 N_2 + (k_{21} - k_{12}) N_1 N_2 = 0.$$

Lösen wir die Relation $N_1 + N_2 = N_0$ nach $N_2 = N_0 - N_1$ auf und setzen diesen Ausdruck in die erste Differentialgleichung ein, nimmt diese die Form

$$\dot{N}_1 = k_1 N_1 - k_{12} N_1 (N_0 - N_1) = k_{12} N_1^2 + (k_1 - k_{12} N_0) N_1$$

an, die nur noch von einer einzigen Variablen abhängt. Ähnlich verfahren wir mit der zweiten Differentialgleichung, so daß wir im Endergebnis schreiben können:

$$\dot{N}_1 = k_{12} N_1^2 + (k_1 - k_{12} N_0) N_1,$$
$$\dot{N}_2 = -k_{21} N_2^2 - (k_2 - k_{21} N_0) N_2.$$

Es handelt sich hierbei um zwei entkoppelte Bernoullische Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Am Vorzeichen der quadratischen und linearen Terme kann man bereits erkennen, daß die beiden Ableitungen entgegengesetztes Vorzeichen aufweisen, daß also entweder die Räuber zunehmen, während die Beute abnimmt, oder umgekehrt. Nun können wir noch versuchen, mit Hilfe der Beziehung $\dot{N}_1 = -\dot{N}_2$ und $N_1 = N_0 - N_2$ die erste Differentialgleichung in die zweite zu überführen. Wir erhalten die äquivalenten Ausdrücke

$$\dot{N}_2 = -k_{12}N_2^2 - k_1N_1 + k_{12}N_0N_2,$$
$$\dot{N}_2 = -k_{21}N_2^2 - k_2N_2 + k_{21}N_0N_2.$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt

$$k_{12} = k_{21} \quad \text{und} \quad k_1N_1 = k_2N_2 .$$

Das gleiche Ergebnis erhalten wir, wenn wir mit Hilfe der Beziehungen $\dot{N}_2 = -\dot{N}_1$ und $N_2 = N_0 - N_1$ die zweite Differentialgleichung in die erste überführen. Schneller hätten wir das Ergebnis haben können, wenn wir in der Gleichung

$$k_1N_1 - k_2N_2 + (k_{21} - k_{12})N_1N_2 = 0$$

beide Koeffizienten gleich Null gesetzt hätten. Zur Lösung der Bernoullischen Differentialgleichungen führen wir diese mit Hilfe der Transformationen

$$\hat{N}_1 = \frac{1}{N_1} \quad \text{und} \quad \hat{N}_2 = \frac{1}{N_2}$$

in die linearen Differentialgleichungen

$$\frac{d\hat{N}_1}{dt} = -(k_1 - k_{12}N_0)\hat{N}_1 - k_{12},$$
$$\frac{d\hat{N}_2}{dt} = (k_2 - k_{21}N_0)\hat{N}_2 + k_{21}$$

über. Diese Gleichungen können durch Trennung der Variablen integriert werden:

$$\frac{d\hat{N}_1}{(k_1 - k_{12}N_0)\hat{N}_1 + k_{12}} = -dt \quad \text{bzw.} \quad \frac{d\hat{N}_2}{(k_2 - k_{21}N_0)\hat{N}_2 + k_{21}} = dt,$$

uns zwar sind die bestimmten Integrale gegeben durch

$$\int_{\hat{N}_1(0)}^{\hat{N}_1(t)} \frac{d\hat{N}_1}{(k_1 - k_{12}N_0)\hat{N}_1 + k_{12}} = -\int_0^t dt \quad \text{und} \quad \int_{\hat{N}_2(0)}^{\hat{N}_2(t)} \frac{d\hat{N}_2}{(k_2 - k_{21}N_0)\hat{N}_2 + k_{21}} = \int_0^t dt .$$

Damit erhalten wir als Ergebnis unserer Integration die Ausdrücke

$$\frac{1}{k_1 - k_{12}N_0}\Big[\ln\Big(\big(k_1 - k_{12}N_0\big)\hat{N}_1 + k_{12}\Big)\Big]_{\hat{N}_1(0)}^{\hat{N}_1(t)} = -t \quad \text{und} \quad \frac{1}{k_2 - k_{21}N_0}\Big[\ln\Big(\big(k_2 - k_{21}N_0\big)\hat{N}_2 + k_{21}\Big)\Big]_{\hat{N}_2(0)}^{\hat{N}_2(t)} = t$$

bzw.

$$\ln\frac{\big(k_1 - k_{12}N_0\big)\hat{N}_1(t) + k_{12}}{\big(k_1 - k_{12}N_0\big)\hat{N}_1(0) + k_{12}} = -\big(k_1 - k_{12}N_0\big)\,t \quad \text{und} \quad \ln\frac{\big(k_2 - k_{21}N_0\big)\hat{N}_2(t) + k_{21}}{\big(k_2 - k_{21}N_0\big)\hat{N}_2(0) + k_{21}} = \big(k_2 - k_{21}N_0\big)\,t.$$

Eine Umkehrsubstitution führt zu den gesuchten Lösungen des Räuber-Beute-Systems:

$$N_1(t) = \frac{\big(k_1 - k_{12}N_0\big)N_1(0)}{\big(k_1 - k_{12}N_2(0)\big)e^{-(k_1 - k_{12}N_0)\,t} - k_{12}N_1(0)},$$

$$N_2(t) = \frac{\big(k_2 - k_{21}N_0\big)N_2(0)}{\big(k_2 - k_{21}N_1(0)\big)e^{(k_2 - k_{21}N_0)\,t} - k_{21}N_2(0)}.$$

Noch elementarer lassen sich die Integranden

$$\frac{dN_1}{N_1^2 - \big(N_0 - k_1/k_{12}\big)N_1} = k_{12}dt \quad \text{und} \quad \frac{dN_2}{N_2^2 - \big(N_0 - k_2/k_{21}\big)N_2} = -k_{21}dt$$

durch Partialbruchzerlegung auf die einfacheren Integrale

$$\int_{N_1(0)}^{N_1(t)} \frac{dN_1}{N_1^2 - \big(N_0 - k_1/k_{12}\big)N_1} = \frac{1}{\big(N_0 - k_1/k_{12}\big)}\left(\int_{N_1(0)}^{N_1(t)} \frac{dN_1}{N_1 - \big(N_0 - k_1/k_{12}\big)} - \int_{N_1(0)}^{N_1(t)} \frac{dN_1}{N_1}\right)$$

etc. zurückführen. In diesem Fall kommt man bei der Integration ohne Transformation aus, denn

$$\int_{N_1(0)}^{N_1(t)} \frac{dN_1}{N_1 - \big(N_0 - k_1/k_{12}\big)} - \int_{N_1(0)}^{N_1(t)} \frac{dN_1}{N_1} = \Big[\ln\Big(N_1 - \big(N_0 - k_1/k_{12}\big)\Big) - \ln N_1\Big]_{N_1(0)}^{N_1(t)}.$$

Die Lösungen sind klarerweise identisch zu den obigen. Im Grenzfall sehr langer Zeiträume gehen diese in die Näherung

$$\lim_{t\to\infty} N_1(t) = N_0 - \frac{k_1}{k_{12}} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{t\to\infty} N_2(t) = N_0 - \frac{k_2}{k_{21}}$$

über. Unser eingangs angestellter Koeffizientenvergleich liefert dann die zeitunabhängigen Lösungen

$$N_1 = \frac{k_2}{k_1 + k_2}N_0 \quad \text{und} \quad N_2 = \frac{k_1}{k_1 + k_2}N_0\,,$$

welche die Normierungsbedingung $N_1 + N_2 = N_0$ erfüllen. Setzen wir diese Lösungen in das System

$$\dot{N}_1 = k_{12} N_1^2 + (k_1 - k_{12} N_0) N_1,$$
$$\dot{N}_2 = -k_{21} N_2^2 - (k_2 - k_{21} N_0) N_2$$

ein, so erhalten wir die Ableitungen zu

$$\dot{N}_1 = k_1 k_2 \frac{k_1 + k_2 - k_{12} N_0}{(k_1 + k_2)^2} N_0,$$
$$\dot{N}_2 = -k_1 k_2 \frac{k_1 + k_2 - k_{21} N_0}{(k_1 + k_2)^2} N_0.$$

Diese müssen aus besagten Gründen identisch verschwinden, ferner muß

$$k_{12} = k_{21} = \frac{k_1 + k_2}{N_0}$$

sein. Damit ist gezeigt, daß die Gleichung

$$\dot{N}_1 + \dot{N}_2 = k_1 k_2 \frac{k_{21} - k_{12}}{(k_1 + k_2)^2} N_0^2$$

identisch erfüllt ist. Außerdem gelten wegen

$$k_1 = k_{12} N_2(t) = k_{12} N_2(0) \quad \text{und} \quad k_2 = k_{21} N_1(t) = k_{21} N_1(0)$$

die Relationen

$$N_1(t) = N_0 - \frac{k_1}{k_{12}} \quad \text{bzw.} \quad N_2(t) = N_0 - \frac{k_2}{k_{21}} \quad \forall t,$$

womit gleichermaßen gezeigt ist, daß die Summe der beiden Lösungen

$$N_1(t) + N_2(t) = 2N_0 - \frac{k_1}{k_{12}} - \frac{k_2}{k_{21}} = 2N_0 - \frac{k_1 + k_2}{k_{12}} = N_0$$

konstant bleibt, d.h. eine gleichbleibende Populationsgröße gewährleistet ist, was zu beweisen war. Unter der Annahme zeitabhängiger Lösungen verharren also sowohl die Räuber- als auch die Beutepopulation ohne echtes Wachstum dauerhaft in einer Singularität. Sowie auch nur Wachstum einsetzt, etwa durch eine geringfügige Störung des Gleichgewichts, beginnen beide Populationen um ihren Fixpunkt zu oszillieren. Jeder Versuch, dieses System zwangsweise zu ändern, führt daher entweder zu steigender Armut bei gleichzeitig steigendem Reichtum oder mündet in einen völlig ungeordneten Gleichverteilungszustand, der gesellschaftlich aber nicht tragfähig ist, weil er unterschiedslos alle ins gleiche Elend stürzt. Andererseits birgt unkontrolliertes Wachstum natürlich unübersehbare Gefahren, weil es die Gesellschaft spaltet.

Das Festhalten am Status quo ist also die einzig vertretbare Gesellschaftsform der Zukunft, was im übrigen auch in völligem Einklang mit dem Energieerhaltungssatz steht, wonach schädliche Energieformen in einem Potentialminimum verharren sollen. Eine Beispielpopulation aus 300 Reichen und 700 Armen ist graphisch in Abbildung 1 veranschaulicht.

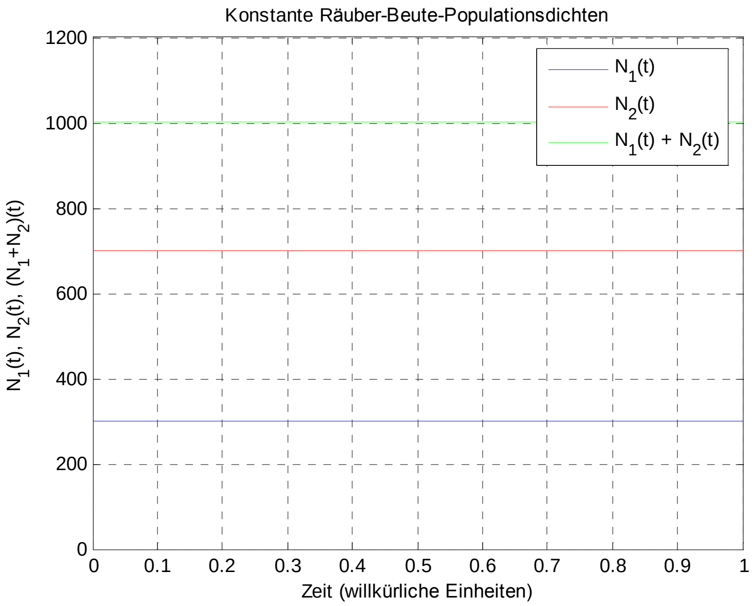

Abbildung 1. Wachstumsbegrenztes Räuber-Beute-System »Arm und Reich«