Aufgabe: Begründen Sie anhand der objektorientierten Erkennung, warum die unter Mathematikern und Informatikern gern gebrauchte Gleichung aus der Boolschen Algebra

$$1+1=1$$

nichts mit der physikalischen Realität zu tun hat. Wie muß die Gleichung richtig lauten?

Lösung: Die objektorientierte Erkennung geht davon aus, daß ein Objekt nur dann als solches erkannt wird, wenn alle oder zumindest die meisten Objektmerkmale einzeln erkannt und kognitiv, d.h. ähnlich wie im Gehirn, zu einem Ganzen zusammengesetzt werden. Wie das Gedächtnis greift auch die objektorientierte Erkennung auf gespeicherte Inhalte zurück, um paarweise Vergleiche ziehen zu können. Der Vergleich fällt um so positiver aus, je mehr Einzelmerkmale als zu einem Objekt gehörig erkannt worden sind. Jedes Merkmal, das nicht zum Objekt gehören kann, macht diesen Vergleich vollständig zunichte. Umgekehrt ermöglicht jedes Merkmal, das unbedingt vorhanden sein muß, diesen Vergleich erst wie in der Vererbung. Wenn Merkmale nicht vererbt worden sind, kann es sich nicht um das gesuchte Objekt handeln.

Um ein Merkmal als vorhanden abhaken zu können, muß es nach der herkömmlichen Logik mit wahr bewertet werden können. Weil es aber Merkmale gibt, die nicht nur ein Objekt beschreiben, sondern mehrere, um nicht zu sagen viele, ist bei objektiver Betrachtung nur dieses einen Merkmals keine Aussage möglich, ob das Merkmal zu dem gesuchten Objekt gehört oder nicht. Jedes Merkmal, das an einem Vergleichsobjekt gefunden wird, kann a priori nicht mit einer größeren Wahrscheinlichkeit als 50 % als zum Objekt gehörig gewertet werden, denn es kann aufgrund dieses einen Merkmals nicht entschieden werden, ob es sich bei dem zu erkennenden Objekt wirklich um das gesuchte Objekt handelt oder nicht.

Überprüfen wir nun insgesamt zwei Merkmale daraufhin, ob es sich bei dem zu erkennenden Objekt um das gesuchte Objekt handeln könnte, haben wir anstatt von nur zwei Möglichkeiten insgesamt vier zur Auswahl. Das ist in nachfolgender Wahrheitstabelle dargestellt.

A	B	$A \cup B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Von den vier möglichen Fällen zur Auswahl kommt nur ein Fall in Betracht, der das Objekt mit Sicherheit nicht beschreibt. Bei einer 50%igen Wahrscheinlichkeit für Kopf oder Zahl ist die Wahrscheinlichkeit für zwei Köpfe beim Wurf zweier Münzen gleich $1/4$. Diese ist ebenso groß wie daß es sich bei dem zu erkennenden Objekt nicht um das gesuchte Objekt handelt. Umgekehrt ist die Wahrscheinlichkeit, daß es sich um das gesuchte Objekt handeln könnte, gleich $3/4$, da sich die beiden Wahrscheinlichkeiten zu eins ergänzen müssen. Eine Möglichkeit muß stets die richtige sein, wenn es nur zwei Möglichkeiten gibt.

Betrachten wir ferner die Wahrheitstabelle für die Konjunktion:

A	B	$A \cap B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Die Wahrscheinlichkeit für ein wahres Ereignis bei der UND-Verknüpfung ist $1/4$, bei der ODER-Verknüpfung dagegen $3/4$. Beide sind zueinander komplementär. In Wahrscheinlichkeiten ausgedrückt heißt das:

$$P(A \cup B) = 1 - P(A \cap B) = 1 - P(A) \cdot P(B),$$

wobei die Einzelwahrscheinlichkeiten für jedes Ereignis per Definition gleich $1/2$ sind. Die gleiche Relation gilt auch, wenn drei Merkmale miteinander verknüpft werden:

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(A \cap B \cap C) = 1 - P(A) \cdot P(B) \cdot P(C),$$

weil die Wahrscheinlichkeit für eine wahre Aussage $P(A \cap B \cap C)$ gleich $1/8$ und damit die Wahrscheinlichkeit für eine richtige Aussage $P(A \cup B \cup C)$ gleich $7/8$ ist. Dabei haben wir die folgenden Wahrheitstabellen für die Disjunktion und für die Konjunktion zugrunde gelegt:

A	B	C	$A \cup B \cup C$	$A \cap B \cap C$
w	w	w	w	w
w	w	f	w	f
w	f	w	w	f
f	w	w	w	f
w	f	f	w	f
f	w	f	w	f
f	f	w	w	f
f	f	f	f	f

Das gleiche Verfahren kann man auf n unabhängige Merkmale ausdehnen. Daraus folgt die Wahrscheinlichkeit, daß es sich um das gesuchte Objekt handelt, zu

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(A_i) = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Mithin gilt im Grenzfall unendlich vieler Merkmale:

$$\lim_{n \to \infty} P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = 1.$$

Wir definieren nachfolgend die Menge

$$\mathbf{B}_{2n-1} = \left\{ (p_i, q_i) \in [0,1] \times [0,1] \mid n \in \mathbf{N},\ p_i = 1/2^i,\ q_i = 1 - p_i,\ i \le n \right\} \subset \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$$

als abzählbar unendliche Menge Boolscher Wahrheitstupel aus paarweise komplementären rationalen Zahlen $\mathbf{Q}$ im Intervall $[0,1]$ derart, daß die klassischen Wahrheitswerte 0 und 1 niemals angenommen werden können, sondern sich nur im Grenzfall unendlich hoher Indizes n ergeben.

Es ist also

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_1 &= \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\} \\
\mathbf{B}_3 &= \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right) \right\} \\
\mathbf{B}_5 &= \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right), \left(\frac{1}{8}, \frac{7}{8} \right) \right\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

wobei die Dichte dieses Wahrheitsraumes sich im Falle $\mathbf{B}_\infty$ um 0 und 1 herum konzentriert, also um die Werte extremer Wahrscheinlichkeit als auch Unwahrscheinlichkeit. Man startet mit gleicher Wahrscheinlichkeit beim Boolschen Wert $1/2$, der nicht wahr und nicht falsch bedeutet, also unscharf ist, und nähert sich dem klassischen Wahrheitswert 1 an, je mehr unscharfe Merkmale man feststellen kann. Es bedarf also zur Wahrheitsfindung weder absoluter Wahrheiten noch Wahrscheinlichkeiten, die größer sind als 50 %. Auch bedarf es keiner Boolschen Operationen und keiner Wahrheitstabellen, weil die Wahrheit nach dieser Methode ein Gitter darstellt, das in der Nähe von 1 und 0 quasi in ein Kontinuum übergeht. Alles läßt sich anhand der gewöhnlichen Multiplikation berechnen. Die größte Unschärfe stellt der Bereich um den Wert $1/2$ dar, mit einem Abstand zum nächsten Nachbarn von $1/4$. Man muß sich nachträglich fragen, wozu man Boolsche Zahlen tatsächlich braucht, wo man sich doch selbst in der *Fuzzy logic* nur ausgewählter rationaler Zahlen bedient.

Wichtig ist ausschließlich, daß sich die gesuchten Merkmale wie bei der Vererbung vom definierten Elternobjekt auf das gesuchte Kindobjekt übertragen, d.h. was beim Elternobjekt nicht definiert wurde, läßt sich auch am Kindobjekt nicht auffinden. Wie die Merkmale im einzelnen nachgewiesen bzw. gemessen werden können, das hängt vom individuellen Objekt und von den jeweiligen Meßmöglichkeiten ab, dafür gibt es kein Patentrezept.

Für $n = 1$, d.h. im Falle nur eines Merkmals, ist die 50-%-Wahrscheinlichkeit, daß es sich um das gesuchte Objekt handelt, genauso groß wie die 50-%-Wahrscheinlichkeit, daß es sich nicht um das gesuchte Objekt handelt:

$$p_1 + q_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Wegen

$$q_n = 1 - p_n = 1 - \frac{1}{2^n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i}$$

folgt für $n \geq 2$ die Identität:

$$p_n + q_n = \frac{1}{2^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i} = 1.$$

Im Grenzfall unendlich vieler Merkmale gilt wegen

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} 1/2^n = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$$

$\forall n \in \mathbf{N}$ ebenfalls

$$\lim_{n\to\infty} (p_n + q_n) = p_\infty + q_\infty = 1.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß es sich bei unendlich vielen unscharfen Merkmalen, die alle nur mit 50 % Wahrscheinlichkeit als wahr angenommen werden (Kopf oder Zahl) um das gesuchte Objekt handelt, ist also bei unendlich vielen unscharfen Merkmalen gleich eins:

$$q_\infty \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$$

qed

Anmerkung: Es liegt also auf der Hand, die rationalen Wahrscheinlichkeiten durch Boolsche Wahrheitswerte in Vielfachen von $1/2$ auszudrücken und wie folgt zu verknüpfen:

	A_1	A_2	A_3	A_4	$\ldots$	A_i	$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \ldots \cup A_n$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$					1
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$				1
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$			1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
n	$\frac{1}{2^n}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\ldots$	$\frac{1}{2^n}$	1

Die eingangs erwähnte logische Verknüpfung

$$1 + 1 = 1$$

ist also nach den Gesetzen der Physik definitiv falsch und muß richtig durch

$$0 + 1 = 1$$

ersetzt werden, weil sich die Wahrheit in den unendlich vielen Merkmalen, die in der 1 auf der linken Seite der Gleichung zusammengefaßt sind, bereits widerspiegelt. Die Aristotelische

Logik begeht den Fehler, daß sie die Wahrheit in lediglich zwei Teilwahrheiten zerlegen will, was nur eine holprige Näherung darstellt. Die Wahrheit muß in Wirklichkeit in unendlich viele Teilwahrheiten zerlegt werden, so daß ein einziges unzutreffendes Merkmal darunter nicht mehr ins Gewicht fällt und an der Wahrheit nichts mehr ändert. Genau diese Erkenntnis spiegelt sich in der objektorientierten Erkennung wider.