Aufgabe: Zeigen Sie, daß Volkswirtschaften Räuber-Beute-Systeme darstellen, in denen die Unternehmer bzw. Arbeitgeber die Beute der Arbeitnehmer sind, die ihrerseits als Räuber in Erscheinung treten. Linearisieren Sie dieses System in geeigneter Weise und bestimmen Sie seine Periodendauer. Begründen Sie, warum Kommunismus und Globalisierung die beiden Grenzformen eines volkswirtschaftlichen Räuber-Beute-Systems sind.

Lösung: Als Lösungsansatz wählen wir die Lotka-Volterra-Gleichungen in ihrer ursprünglichen Form:

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2), \qquad \frac{dN_2}{dt} = -N_2(\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1).$$

Die darin vorkommenden Variablen und Konstanten haben dabei die in der Tabelle angegebene Bedeutung:

Symbol	Bedeutung
N_1	Anzahl der Arbeitgeber (Produzenten)
N_2	Anzahl der Arbeitnehmer (Konsumenten)
ε_1	Zuwachsrate durch Unternehmensgründungen auf Arbeitgeberseite
γ_1	Insolvenzrate auf Arbeitgeberseite
γ_2	Neueinstellungsrate auf Arbeitnehmerseite
ε_2	Arbeitslosenrate auf Arbeitnehmerseite

Aus der systemdynamischen Modellierung des Räuber-Beute-Zyklus und der nachfolgenden Darstellung der Simulation im Phasendiagramm (Arbeitgeber gegen Arbeitnehmer) ersieht man, daß das System einen stationären Punkt aufweist, der von allen anderen Systemzuständen umrundet wird. Das System bleibt stabil, wenn beide Änderungsraten gleich Null sind, d.h. wenn gilt:

$$N_1^* = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} \quad \text{und} \quad N_2^* = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}.$$

Sowohl die Arbeitnehmer- als auch die Arbeitgeberpopulation oszillieren ungedämpft um diesen stationären Punkt. Die stabile Arbeitgeberzahl muß auf der Arbeitnehmerseite gleich dem Quotienten aus Arbeitslosen- und Neueinstellungsrate sein, die stabile Arbeitnehmerzahl ist auf Arbeitgeberseite der Quotient aus der Zuwachsrate an Unternehmensneugründungen und der Insolvenzrate.

Die Zahl der Arbeitgeber und Arbeitnehmer entwickelt sich ähnlich wie die beiden Komponenten Ort und Impuls eines eindimensionalen mechanischen Systems. Zudem läuft der Zustandsvektor mit den beiden Komponenten Arbeitgeber und Arbeitnehmer wie bei einem Hamilton-System längs einer „Höhenlinie“ um einen Potentialberg herum. Um eine Funktion H für diesen Potentialberg zu finden, vermindern wir zuerst die Zahl der frei wählbaren Parameter durch Division der Zahl der Arbeitgeber und Arbeitnehmer durch ihre stationären Werte[1]. Auf diese Weise erhalten wir ein dimensionsloses Gleichungssystem mit einem einzigen stationären Punkt, i.e. $(1,1)$:

$$\dot{n}_1 = \varepsilon_1 n_1 (1 - n_2),$$
$$\dot{n}_2 = -\varepsilon_2 n_2 (1 - n_1),$$

wobei

$$n_1 \equiv \frac{N_1}{N_1^*} \quad \text{und} \quad n_2 \equiv \frac{N_2}{N_2^*}.$$

Dividiert man die Arbeitgebergleichung durch die Arbeitnehmergleichung, resultiert eine zeitfreie Darstellung, die separierbar ist,

$$\frac{1-n_1}{n_1} dn_1 = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{1-n_2}{n_2} dn_2,$$

und wie folgt integriert werden kann:

$$\varepsilon_2 \int_{n_{1,0}}^{n_1} \frac{dn_1}{n_1} - \varepsilon_2 \int_{n_{1,0}}^{n_1} dn_1 + \varepsilon_1 \int_{n_{2,0}}^{n_2} \frac{dn_2}{n_2} - \varepsilon_1 \int_{n_{2,0}}^{n_2} dn_2 = 0.$$

Das bestimmte Integral lautet also:

$$\varepsilon_2 \ln \frac{n_1}{n_{1,0}} - \varepsilon_2 (n_1 - n_{1,0}) + \varepsilon_1 \ln \frac{n_2}{n_{2,0}} - \varepsilon_1 (n_2 - n_{2,0}) = 0$$

oder in symmetrischer Schreibweise

$$\varepsilon_2 (n_1 - n_{1,0}) + \varepsilon_1 (n_2 - n_{2,0}) - \varepsilon_2 \ln \frac{n_1}{n_{1,0}} - \varepsilon_1 \ln \frac{n_2}{n_{2,0}} = 0.$$

Dagegen führt das unbestimmte Integral auf folgende Gleichung

$$\varepsilon_2 \int \frac{dn_1}{n_1} - \varepsilon_2 \int dn_1 + \varepsilon_1 \int \frac{dn_2}{n_2} - \varepsilon_1 \int dn_2 = 0,$$

die integriert und entsprechend umgeformt die Integrationskonstante ergibt:

$$\varepsilon_2 (n_1 - \ln n_1) + \varepsilon_1 (n_2 - \ln n_2) = C,$$

mit

[1] Auf der Trajektorie sind allerdings nie beide Werte zugleich stationär, sondern immer nur einer von beiden.

$$C=\varepsilon_2\left(n_{1,0}-\ln n_{1,0}\right)+\varepsilon_1\left(n_{2,0}-\ln n_{2,0}\right).$$

Führt man zwei neue Variablen

$$x=n_1-1 \quad \text{und} \quad y=n_2-1$$

ein, welche den relativen Abstand zum stationären Punkt $(1,1)$ messen, erhält man den Ausdruck

$$\varepsilon_2\left(1+x-\ln(1+x)\right)+\varepsilon_1\left(1+y-\ln(1+y)\right)=C.$$

Entwickeln wir noch die Logarithmusfunktionen bis einschließlich dritter Ordnung, so ergibt sich

$$\varepsilon_2\left(1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\ldots\right)+\varepsilon_1\left(1+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3+\ldots\right)=C.$$

Unter Vernachlässigung der kubischen Terme und durch Einführung einer neuen Konstante $H\equiv C-\varepsilon_1-\varepsilon_2$ erhalten wir ein Resultat, das an die Hamilton-Funktion des harmonischen Oszillators erinnert:

$$H\approx\frac{\varepsilon_2x^2}{2}+\frac{\varepsilon_1y^2}{2}.$$

Sowohl die Arbeitgeber- als auch die Arbeitnehmerpopulation oszillieren ungedämpft um ihren Gleichgewichtspunkt. Dabei haben wir nichts anderes getan als aus den Räuber-Beute-Gleichungen eine zeitunabhängige Potentialfunktion H gebildet und diese um den stationären Punkt linearisiert.

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen dazu lauten:

$$\dot{y}\equiv\frac{\partial H}{\partial x}=\varepsilon_2x, \qquad \dot{x}=-\frac{\partial H}{\partial y}=-\varepsilon_1y.$$

Diese beiden Differentialgleichungen lassen sich durch nochmalige Differentiation auf eine einfache Form bringen:

$$\ddot{x}+\varepsilon_1\varepsilon_2x=0,$$
$$\ddot{y}+\varepsilon_1\varepsilon_2y=0,$$

woraus wir die Schwingungsperiode

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}$$

entnehmen können. Die Frequenz der Populationsschwankungen ist also proportional zum geometrischen Mittel aus der Zuwachsrate der Unternehmensgründungen auf Arbeitgeberseite und der Arbeitslosenrate auf Arbeitnehmerseite.

Räuber-Beute-Systeme leiten sich über den Hamilton-Formalismus direkt aus dem Energieerhaltungssatz her, wobei die Energie insgesamt konstant ist und nur hin und her bzw. umverteilt wird. Vermutlich läßt sich sogar das gesamte Universum als solches Räuber-Beute-System beschreiben, denn warum sollte im kleinen gelten, was im großen nicht gilt? Die Naturgesetze sind universell. Deshalb kann man die Räuber-Beute-Gleichungen mit gutem Grund auch als Weltformel bezeichnen.

Kommunismus und ungehemmter Kapitalismus sind nur die beiden Grenzformen eines solchen volkswirtschaftlichen Räuber-Beute-Systems. Beim Kommunismus haben die Räuber, d.h. die Arbeitnehmer, die unternehmerische Freiheit über Gebühr beschnitten und damit die Arbeitgeber sozusagen zum Aussterben gebracht, im schonungslosen Kapitalismus hingegen gibt es so viele Arbeitgeber, daß die Arbeitnehmer knapp zu werden drohen und über die Systemgrenzen hinaus[2] beigetrieben werden müssen. Natürlich kann dieser Grenzfall in Wirklichkeit niemals überschritten werden, da der Welthandel ein abgeschlossenes System darstellt.

[2] z.B. durch Globalisierung