Aufgabe: Sie wollen mit einer fliegenden Plattform einen Grenzverlauf überwachen und jeden Eindringling im Sicherheitskorridor ergreifen. Dabei haben Sie es mit insgesamt 1000 illegalen Grenzgängern zu tun, die täglich ihre Waren über die Grenze schmuggeln. Die Missionseffizienz ihres Systems liege bei einem Prozent pro Tag, bezogen auf die Gesamtzahl der Eindringlinge, die Sie dingfest machen müssen. Wie lange ist ihr System missionswirksam, wenn Sie wenigstens einen Eindringling pro Tag erwischen möchten? Wie ändert sich die Missionswirksamkeit, wenn Sie die Missionseffizienz verdoppeln? Nehmen Sie an, daß die täglichen Missionskosten den anfänglichen Schaden durch den illegalen Warenverkehr gerade kompensieren. Welche Schlußfolgerungen leiten Sie daraus ab?

Lösung: Üblicherweise löst man eine solche Problemstellung mit Hilfe der Weltformel[1] (Räuber-Beute-Gleichungen):

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2) \qquad \frac{dN_2}{dt} = -N_2(\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1)$$

Die darin vorkommenden Variablen und positiven Konstanten haben folgende Bedeutung:

Symbol	Bedeutung
N_1	Anzahl der Eindringlinge
N_2	Anzahl der grenzsichernden Plattformen
ε_1	Zuwachsrate der Eindringlinge
γ_1	Eliminierungsrate der Eindringlinge pro grenzsichernder Plattform
γ_2	Zuwachsrate der grenzsichernden Plattformen pro Eindringling
ε_2	Außerdienststellungsrate der Plattformen ohne weitere Eindringlinge

Wir nehmen an, daß die Zuwachsraten der Eindringlinge ε_1 und der grenzsichernden Plattformen γ_2 gleich Null sind, und daß es keine Außerdienststellung von Plattformen gibt ($\varepsilon_2 = 0$). Dann vereinfachen sich die Lotka-Volterra-Gleichungen zu

$$\frac{dN_1}{dt} = -\gamma_1 N_1 N_2 \quad \text{und} \quad \frac{dN_2}{dt} = 0.$$

Da $N_2(t) = N_{2,0}$ konstant ist, können wir die erste Differentialgleichung auf folgende Form bringen:

$$\frac{dN_1}{N_1} = -\gamma_1 N_{2,0} dt,$$

[1] In diesen Differentialgleichungen spiegelt sich die Dualität der Welt wider: Materie–Antimaterie, Entstehen und Vergehen. Die Beziehung zwischen beiden Größen leitet sich direkt aus dem Energieerhaltungssatz her und ist konform zum dritten Newtonschen Gesetz *Actio est Reactio*. In der Physik würde man die beiden darin vorkommenden Variablen als Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren bezeichnen, ihre Kopplung als Wechselwirkung beschreiben.

und integrieren:

$$\int_{N_{1,0}}^{N_1} \frac{dN_1}{N_1} = -\gamma_1 N_{2,0} \int_0^t dt.$$

Die Integrationsgrenzen eingesetzt liefert

$$\ln \frac{N_1}{N_{1,0}} = -\gamma_1 N_{2,0} t,$$

womit die zeitliche Abhängigkeit der Eindringlinge gegeben ist durch

$$N_1(t) = N_{1,0} e^{-\gamma_1 N_{2,0} t}.$$

In Abbildung 1 ist die Missionswirksamkeit in Abhängigkeit von der Missionseffizienz für zwei verschiedene Werte von γ_1 als Funktion der Zeit dargestellt. Das System mit $\gamma_1 = 0{,}01/\mathrm{d}$ ist 230 Tage missionswirksam, danach hat es sich erübrigt. Das System mit der doppelten Missionseffizienz $\gamma_1 = 0{,}02/\mathrm{d}$ ist hingegen nur 150 Tage missionswirksam, danach kann es außer Dienst gestellt werden.

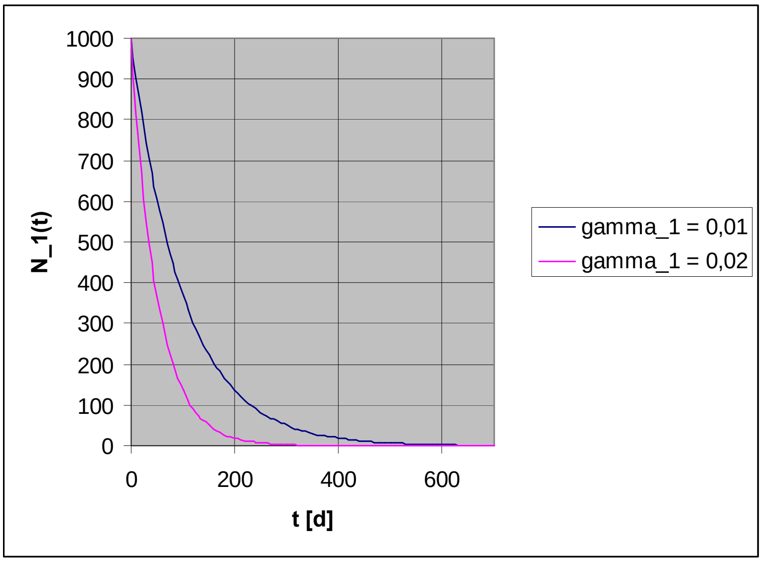

Abbildung 1. Missionswirksamkeit als Funktion der Missionseffizienz

Die Missionswirksamkeit verhält sich also umgekehrt proportional zur Missionseffizienz. Nach Ablauf der Missionswirksamkeit bringt das System seinem Betreiber keinen Nutzen mehr, es verursacht ab diesem Zeitpunkt nur noch Kosten.

Natürlich ist dieser Ansatz unter Nullsetzung dreier wichtiger Einflußgrößen zu kurz gegriffen, weil reale Systeme sich nicht auf eine solch triviale und naive Art beschreiben lassen. Denn sowie der Betreiber des Grenzüberwachungssystems in seinen Anstrengungen nachläßt und sein System stillegt, blüht der Schmuggel wieder auf und der Prozeß beginnt von neuem. Nicht übersehen werden darf, daß auch die Eindringlinge dazulernen und vorübergehend pausieren könnten. Das dagegen neu etablierte Grenzüberwachungssystem wäre dann theoretisch

schon am nächsten Tag missionsunwirksam, was dazu führt, daß das Kosten-Nutzen-Verhältnis weiter eskaliert. Dann hätten tatsächlich die Schmuggler gewonnen.
Grundsätzlich ist von den Kosten einer Überwachungsmission der Nutzen, der durch die Ergreifung der Schmuggler entsteht, wieder abzuziehen, so daß sich die Nettokosten proportional zum durchschnittlich angerichteten Schaden jedes einzelnen Schmugglers κ sowie proportional zur Zahl der noch nicht festgenommenen Schmuggler $N_{1,0} - N_1(t)$ und proportional zur Zeit *t* entwickeln. Dies führt auf folgende einfache Kostenfunktion:

$$K(\gamma_1) = \kappa \int_0^T \left[N_{1,0} - N_1(t)\right] dt = N_{1,0}\kappa \int_0^T \left[1 - e^{-\gamma_1 N_{2,0} t}\right] dt = N_{1,0}\kappa \left[T + \frac{1}{\gamma_1 N_{2,0}}\left(e^{-\gamma_1 N_{2,0} T} - 1\right)\right].$$

Dieser Wert entspricht der Fläche unter den Kurven in Abbildung 2. Im Falle, daß $\gamma_1 N_{2,0} T << 1$, kann die Exponentialfunktion in eine Taylorreihe entwickelt werden, wobei Terme höher als zweiter Ordnung vernachlässigt werden können. Damit ergibt sich folgende Vereinfachung:

$$K(\gamma_1) = \frac{1}{2}\gamma_1 N_{1,0} N_{2,0} \kappa T^2,$$

d.h. die Kosten steigen proportional zur Missionseffizienz γ_1 und mit dem Quadrat der Missionsdauer *T*.

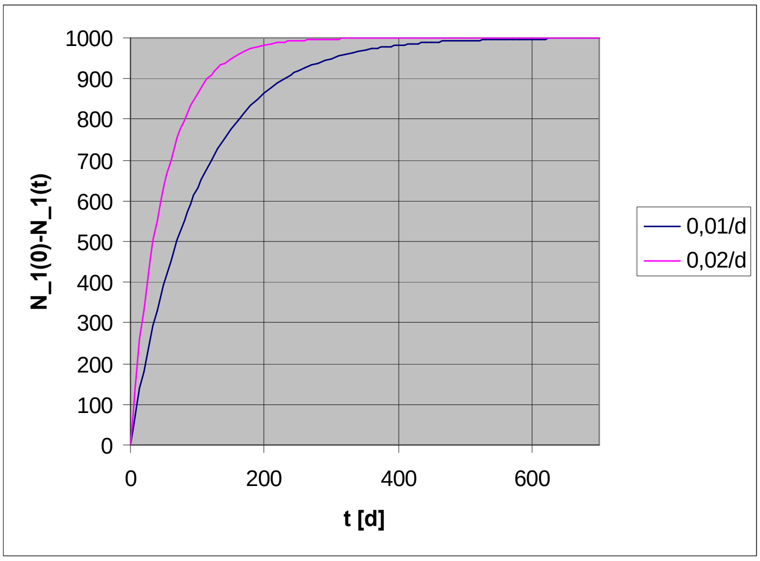

Abbildung 2. Differentielle Darstellung der Kostenentwicklung über der Zeit

Im Falle unserer 230 Tage währenden Beispielmissionen läßt sich diese Näherung jedoch nicht anwenden, weil der Exponent in der Größenordnung von 5 liegt. Das Verhältnis der Missionskosten liegt bei ungefähr 1,3, genaugenommen bei

$$K(0{,}02)/K(0{,}01) = 1{,}29.$$

Bei längeren Betriebszeiten wandert dieser Quotient gegen eins, d.h. es macht keinen Unterschied mehr, welche Missionseffizienz mein System besitzt, denn sie sind beide gleichermaßen unwirksam, auch wenn sie sich in den Betriebskosten nicht unterscheiden. Ausschlaggebend dafür ist allein die Tatsache, daß sie unterhalten werden müssen, damit der Schmuggel nicht wieder aufblüht. Dazu wiederum reicht die minimal notwendige Ausstattung.

