Aufgabe: Sie messen von einem Flugzeug aus die Querschnittsfläche S eines bewegten Objekts am Boden, entweder gleichzeitig mit mehreren Flugzeugen von verschiedenen Punkten aus oder mit nur einem Flugzeug zu verschiedenen Zeiten der Reihe nach. Die Flugzeuge können untereinander Informationen austauschen. Zum Zeitpunkt der Messungen kennen Sie jeweils den Elevationswinkel des Objekts zum Flugzeug und den Azimutwinkel seiner relativen Bewegung in bezug auf das Koordinatensystem des Sensors. Welche Abmessungen hat das Objekt, wenn Sie annehmen, daß es eine konstante Länge, Breite und Höhe hat? Wie groß ist das Objekt, wenn Sie zum Zeitpunkt der ersten Messung eine Fläche von 26,27 m² bei einem Elevationswinkel von 60° und einem Azimutwinkel von 30° gemessen haben, zum Zeitpunkt der zweiten Messung eine Fläche von 26,53 m² bei einem Elevationswinkel von 30° und einem Azimutwinkel von 45° und zum Zeitpunkt der dritten Messung eine Fläche von 27,57 m² bei einem Elevationswinkel von 45° und einem Azimutwinkel von 60°? Alle Hilfsmittel sind erlaubt.

Lösung:

Einer Formelsammlung für Darstellende Geometrie können wir folgende Gleichung für die Querschnittsfläche eines Quaders entnehmen, die für Winkel im Bereich zwischen 0° und 90° gilt:

$$S = ab\sin\theta + bc\cos\varphi\cos\theta + ca\sin\varphi\cos\theta.$$

Darin sind a, b und c die Kantenlängen des Quaders, θ der Elevationswinkel, mit dem er von oben betrachtet wird und φ der Azimutwinkel zwischen seiner Längsachse und dem Aufpunkt des Betrachters am Boden. Die Gleichung enthält drei unbekannte Größen, und zwar die jeweiligen Seitenflächen des Quaders

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv ab, \\ x_2 &\equiv bc, \\ x_3 &\equiv ca, \end{aligned}$$

und vier konstante Koeffizienten. Fügen wir diese Abkürzungen in die Gleichung ein, so können wir schreiben:

$$\sin\theta x_1 + \cos\varphi\cos\theta x_2 + \sin\varphi\cos\theta x_3 = S.$$

Daraus läßt sich ein lineares Gleichungssystem von drei Gleichungen mit drei Unbekannten gewinnen, indem man die Winkel θ_i und φ_i und die projizierten Flächen $S_i, i = 1, 2, 3$ als konstante Koeffizienten auffaßt:

$$\begin{aligned} \sin\theta_1 x_1 + \cos\varphi_1\cos\theta_1 x_2 + \sin\varphi_1\cos\theta_1 x_3 &= S_1, \\ \sin\theta_2 x_1 + \cos\varphi_2\cos\theta_2 x_2 + \sin\varphi_2\cos\theta_2 x_3 &= S_2, \\ \sin\theta_3 x_1 + \cos\varphi_3\cos\theta_3 x_2 + \sin\varphi_3\cos\theta_3 x_3 &= S_3. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Rangs der Matrix formen wir in Matrizenschreibweise um:

$$\begin{pmatrix} \sin\theta_1 & \cos\varphi_1\cos\theta_1 & \sin\varphi_1\cos\theta_1 \\ \sin\theta_2 & \cos\varphi_2\cos\theta_2 & \sin\varphi_2\cos\theta_2 \\ \sin\theta_3 & \cos\varphi_3\cos\theta_3 & \sin\varphi_3\cos\theta_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}.$$

Der Rang sowohl der Koeffizientenmatrix als auch der erweiterten Koeffizientenmatrix ist 3, also hat unser System eine eindeutig bestimmte Lösung, die Determinante des homogenen Systems für drei unterschiedliche Punkte ist von Null verschieden. Die Lösungen lauten:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D},$$

wobei die Determinanten gegeben sind durch

$$\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} \sin\theta_1 & \cos\varphi_1\cos\theta_1 & \sin\varphi_1\cos\theta_1 \\ \sin\theta_2 & \cos\varphi_2\cos\theta_2 & \sin\varphi_2\cos\theta_2 \\ \sin\theta_3 & \cos\varphi_3\cos\theta_3 & \sin\varphi_3\cos\theta_3 \end{vmatrix} &= -\sin\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\sin(\varphi_2-\varphi_3) \\ &\quad -\sin\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_1\sin(\varphi_3-\varphi_1) \\ &\quad -\sin\theta_3\cos\theta_1\cos\theta_2\sin(\varphi_1-\varphi_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1 = \begin{vmatrix} S_1 & \cos\varphi_1\cos\theta_1 & \sin\varphi_1\cos\theta_1 \\ S_2 & \cos\varphi_2\cos\theta_2 & \sin\varphi_2\cos\theta_2 \\ S_3 & \cos\varphi_3\cos\theta_3 & \sin\varphi_3\cos\theta_3 \end{vmatrix} &= -S_1\cos\theta_2\cos\theta_3\sin(\varphi_2-\varphi_3) \\ &\quad -S_2\cos\theta_3\cos\theta_1\sin(\varphi_3-\varphi_1) \\ &\quad -S_3\cos\theta_1\cos\theta_2\sin(\varphi_1-\varphi_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 = \begin{vmatrix} \sin\theta_1 & S_1 & \sin\varphi_1\cos\theta_1 \\ \sin\theta_2 & S_2 & \sin\varphi_2\cos\theta_2 \\ \sin\theta_3 & S_3 & \sin\varphi_3\cos\theta_3 \end{vmatrix} &= S_1(\cos\theta_2\sin\theta_3\sin\varphi_2 - \sin\theta_2\cos\theta_3\sin\varphi_3) \\ &\quad + S_2(\cos\theta_3\sin\theta_1\sin\varphi_3 - \sin\theta_3\cos\theta_1\sin\varphi_1) \\ &\quad + S_3(\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\varphi_1 - \sin\theta_1\cos\theta_2\sin\varphi_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_3 = \begin{vmatrix} \sin\theta_1 & \cos\varphi_1\cos\theta_1 & S_1 \\ \sin\theta_2 & \cos\varphi_2\cos\theta_2 & S_2 \\ \sin\theta_3 & \cos\varphi_3\cos\theta_3 & S_3 \end{vmatrix} &= -S_1(\cos\theta_2\sin\theta_3\cos\varphi_2 - \sin\theta_2\cos\theta_3\cos\varphi_3) \\ &\quad - S_2(\cos\theta_3\sin\theta_1\cos\varphi_3 - \sin\theta_3\cos\theta_1\cos\varphi_1) \\ &\quad - S_3(\cos\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi_1 - \sin\theta_1\cos\theta_2\cos\varphi_2). \end{aligned}$$

Nach entsprechender Umformung können wir nach den Kantenlängen des Quaders auflösen:

$$a = \sqrt{\frac{x_3 x_1}{x_2}}, \quad b = \sqrt{\frac{x_1 x_2}{x_3}}, \quad c = \sqrt{\frac{x_2 x_3}{x_1}}.$$

Um die Probe aufs Exempel zu machen, ob unser Verfahren auch die geforderte Genauigkeit liefert, ziehen wir die nachfolgende Tabelle heran. Das konkrete Rechenbeispiel liefert die Werte $a = 5\text{ m}, b = 4\text{ m}, c = 3\text{ m}$ zurück. Eine einstellige Genauigkeit hinter dem Komma wäre allerdings auch ausreichend gewesen, um die Kantenlängen zu reproduzieren.

	$\varphi = 0°$	$\varphi = 30°$	$\varphi = 45°$	$\varphi = 60°$	$\varphi = 90°$
$\theta = 0°$	12,00 m²	17,89 m²	19,09 m²	18,99 m²	15,00 m²
$\theta = 30°$	20,39 m²	25,50 m²	26,53 m²	26,45 m²	22,99 m²
$\theta = 45°$	22,63 m²	26,79 m²	27,64 m²	27,57 m²	24,75 m²
$\theta = 60°$	23,32 m²	26,27 m²	26,87 m²	26,82 m²	24,82 m²
$\theta = 90°$	20,00 m²	20,00 m²	20,00 m²	20,00 m²	20,00 m²