Aufgabe: Unter welchem Winkel in Azimut und Elevation muß ein bewegtes Objekt am Boden aus der Luft betrachtet werden, um es so frühzeitig wie möglich erkennen und identifizieren zu können? Legen Sie zur Vereinfachung einen Quader mit der Länge a, der Breite b und der Höhe c zugrunde. Welcher Punkt muß angeflogen werden, wenn sich das Flugzeug über ebenem Terrain in einer Höhe $h = 1000\ \mathrm{m}$ über Grund befindet und seine Flugfläche beibehalten werden soll? Geben Sie die expliziten Werte für einen Quader mit den konkreten Abmessungen $a = 5\ \mathrm{m}$, $b = 4\ \mathrm{m}$ und $c = 3\ \mathrm{m}$ an. Wie ändern sich die Werte, wenn das Flugzeug das Objekt auf einer Kreisbahn durch diesen Punkt umrunden soll?

Lösung:

Unser Quader befinde sich mit einer Ecke im Ursprung eines rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems (siehe Abbildung 1) und werde in Richtung der Koordinatenachsen durch die drei Vektoren

$$\vec{a} = (a, 0, 0)$$
$$\vec{b} = (0, b, 0)$$
$$\vec{c} = (0, 0, c)$$

aufgespannt.

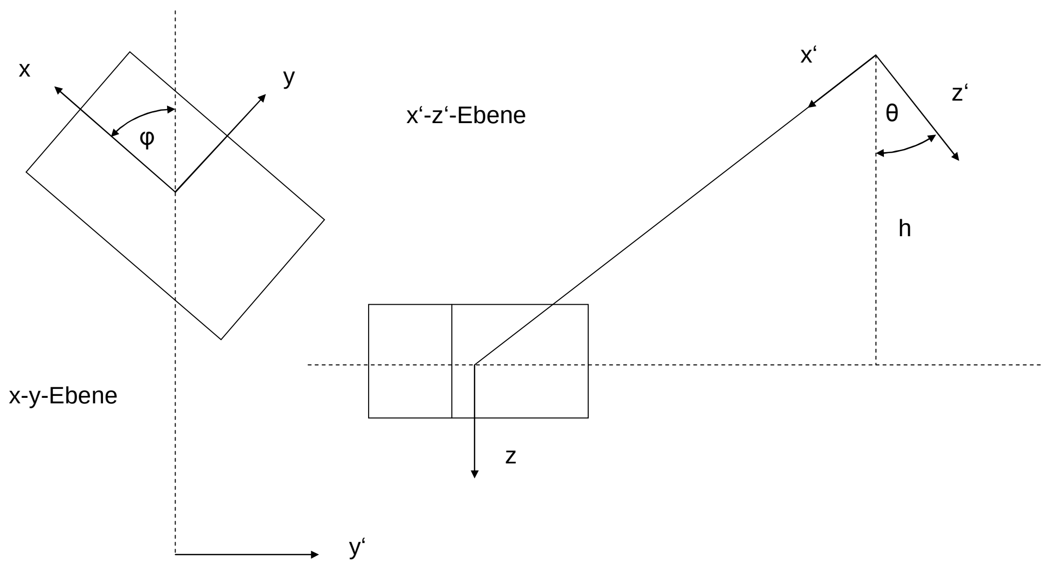

Abbildung 1. Drauf- und Seitenansicht eines Quaders in einem gestrichenen und einem ungestrichenen Koordinatensystem

Gemäß Abbildung 2 zerlegen wir den Körper in seine Flächenelemente und ordnen jeder in Blickrichtung sichtbaren Teilfläche einen Normalenvektor $\vec{n}$ zu, der betragsmäßig der Größe dieser Fläche entspricht. Die gesehene Fläche erhalten wir dann aus dem Skalarprodukt eines jeden der drei Normalenvektoren mit dem Vektor in Blickrichtung.

Zunächst entwickeln wir die Einheitsvektoren des im Objekt verankerten ungestrichenen Systems nach Komponenten des mit der Kamera fest verbunden gestrichenen Systems:

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_x &= \cos\varphi\cos\theta\vec{e}_x' - \sin\varphi\vec{e}_y' - \cos\varphi\sin\theta\vec{e}_z', \\
\vec{e}_y &= \sin\varphi\cos\theta\vec{e}_x' + \cos\varphi\vec{e}_y' - \sin\varphi\sin\theta\vec{e}_z', \\
\vec{e}_z &= \sin\theta\vec{e}_x' + \cos\theta\vec{e}_z'.
\end{aligned}
$$

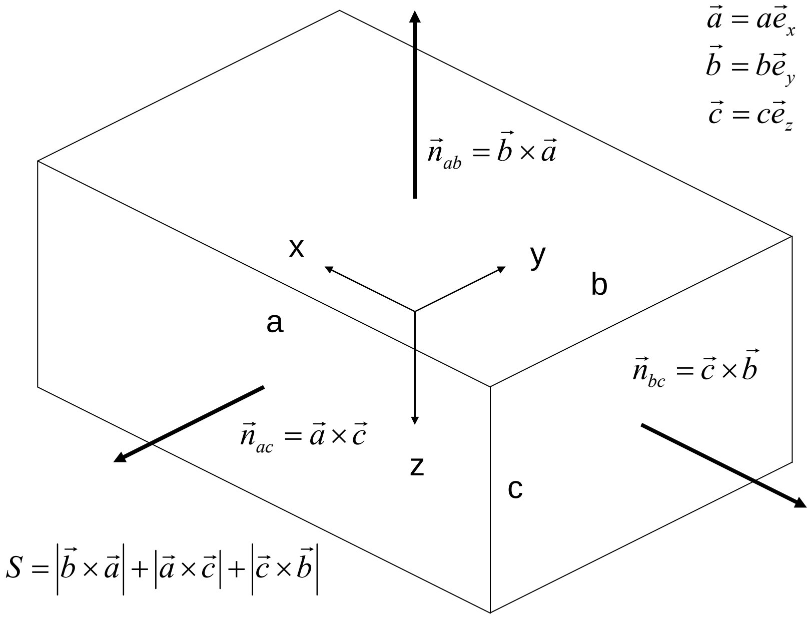

Abbildung 2. Zerlegung der Oberflächen eines Quaders in Vektorprodukte

Zur Bestimmung der Richtungskosinusse bilden wir die Skalarprodukte

$$
\begin{aligned}
&\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x' = \cos\varphi\cos\theta; \quad &&\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y' = -\sin\varphi; \quad &&\vec{e}_x\cdot\vec{e}_z' = -\cos\varphi\sin\theta; \\
&\vec{e}_y\cdot\vec{e}_x' = \sin\varphi\cos\theta; \quad &&\vec{e}_y\cdot\vec{e}_y' = \cos\varphi; \quad &&\vec{e}_y\cdot\vec{e}_z' = -\sin\varphi\sin\theta; \\
&\vec{e}_z\cdot\vec{e}_x'{}' = \sin\theta; \quad &&\vec{e}_z\cdot\vec{e}_y' = 0; \quad &&\vec{e}_z\cdot\vec{e}_z' = \cos\theta,
\end{aligned}
$$

womit wir auf folgende Transformationsgleichungen kommen:

$$
\begin{aligned}
x' &= x\cos\varphi\cos\theta + y\sin\varphi\cos\theta + z\sin\theta, \\
y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi, \\
z' &= -x\cos\varphi\sin\theta - y\sin\varphi\sin\theta + z\cos\theta.
\end{aligned}
$$

Diese können übersichtlicher in Matrixschreibweise dargestellt werden:

$$
\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.
$$

Mit Hilfe dieser Transformation können die Basisvektoren des aufgespannten Parallelepipeds im gestrichenen System berechnet werden:

$$\vec{a}' = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\varphi\cos\theta \\ -a\sin\varphi \\ -a\cos\varphi\sin\theta \end{pmatrix},$$

$$\vec{b}' = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\sin\varphi\cos\theta \\ b\cos\varphi \\ -b\sin\varphi\sin\theta \end{pmatrix},$$

$$\vec{c}' = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\sin\theta \\ 0 \\ c\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Damit können wir nun die Kreuzprodukte von sämtlichen auf den Seitenflächen des Parallelepipeds senkrecht stehenden Normalenvektoren im System des Sensors bestimmen:

$$\vec{b}' \times \vec{a}' = \begin{pmatrix} b'_y a'_z - b'_z a'_y \\ b'_z a'_x - b'_x a'_z \\ b'_x a'_y - b'_y a'_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ab\sin\theta \\ 0 \\ -ab\cos\theta \end{pmatrix},$$

$$\vec{a}' \times \vec{c}' = \begin{pmatrix} a'_y c'_z - a'_z c'_y \\ a'_z c'_x - a'_x c'_z \\ a'_x c'_y - a'_y c'_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ac\sin\varphi\cos\theta \\ -ac\cos\varphi \\ ac\sin\varphi\sin\theta \end{pmatrix},$$

$$\vec{c}' \times \vec{b}' = \begin{pmatrix} c'_y b'_z - c'_z b'_y \\ c'_z b'_x - c'_x b'_z \\ c'_x b'_y - c'_y b'_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -bc\cos\varphi\cos\theta \\ bc\sin\varphi \\ bc\cos\varphi\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Die Projektionen dieser Flächen in Blickrichtung, die definiert ist durch den Normalenvektor im gestrichenen System $\vec{n} = \vec{e}'_x$, erhalten wir aus den jeweiligen Spatprodukten, deren Absolutbeträge aufaddiert die gesamte projizierte Querschnittsfläche unseres Quaders ergeben:

$$\begin{aligned} S &= \left|(\vec{b}' \times \vec{a}')\cdot\vec{n}\right| + \left|(\vec{a}' \times \vec{c}')\cdot\vec{n}\right| + \left|(\vec{c}' \times \vec{b}')\cdot\vec{n}\right| \\ &= \left|b'_y a'_z - b'_z a'_y\right| + \left|a'_y c'_z - a'_z c'_y\right| + \left|c'_y b'_z - c'_z b'_y\right| \\ &= \left|-ab\sin\theta\right| + \left|-ac\sin\varphi\cos\theta\right| + \left|-bc\cos\varphi\cos\theta\right|. \end{aligned}$$

Wir differenzieren nun die Fläche

$$S = ab\sin\theta + ac\sin\varphi\cos\theta + bc\cos\varphi\cos\theta$$

im Intervall $[0,\ \pi/2]$, wobei wir die Absolutbeträge weglassen können, nach ihren beiden Variablen und berechnen die partiellen Ableitungen bis einschließlich zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = ab\cos\theta - ac\sin\varphi\sin\theta - bc\cos\varphi\sin\theta; \quad \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} = -ab\sin\theta - ac\sin\varphi\cos\theta - bc\cos\varphi\cos\theta;$$
$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = ac\cos\varphi\cos\theta - bc\sin\varphi\cos\theta; \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial \varphi^2} = -ac\sin\varphi\cos\theta - bc\cos\varphi\cos\theta;$$
$$\frac{\partial^2 S}{\partial \varphi\partial \theta} = -ac\cos\varphi\sin\theta + bc\sin\varphi\sin\theta; \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial \theta\partial \varphi} = -ac\cos\varphi\sin\theta + bc\sin\varphi\sin\theta.$$

Um die relativen Extrema dieser Funktion zu bestimmen, müssen wir die ersten partiellen Ableitungen gleich Null setzen,

$$ab\cos\theta - ac\sin\varphi\sin\theta - bc\cos\varphi\sin\theta = 0,$$
$$ac\cos\varphi\cos\theta - bc\sin\varphi\cos\theta = 0,$$

und nach θ bzw. φ auflösen. Damit erhalten wir die Lösungen

$$\varphi_0 = \arctan\frac{a}{b}, \quad \theta_0 = \arctan\frac{\mathrm{ab}}{\sqrt{b^2c^2 + \mathrm{c}^2\mathrm{a}^2}}.$$

Um das Vorzeichen des Extremums zu bestimmen, muß noch die Funktionaldeterminante im Punkt (θ_0, φ_0) berechnet werden:

$$D(\theta_0, \varphi_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} & \frac{\partial^2 S}{\partial \varphi\partial \theta} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial \theta\partial \varphi} & \frac{\partial^2 S}{\partial \varphi^2} \end{vmatrix} (\theta_0, \varphi_0).$$

Ihre Elemente sind gegeben durch

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2}(\theta_0, \varphi_0) = -ab\sin\theta_0 - ac\sin\varphi_0\cos\theta - bc\cos\varphi_0\cos\theta_0,$$
$$\frac{\partial^2 S}{\partial \varphi^2}(\theta_0, \varphi_0) = -ac\sin\varphi_0\cos\theta_0 - bc\cos\varphi_0\cos\theta_0,$$
$$\frac{\partial^2 S}{\partial \varphi\partial \theta}(\theta_0, \varphi_0) = \frac{\partial^2 S}{\partial \theta\partial \varphi}(\theta_0, \varphi_0) = -ac\cos\varphi_0\sin\theta_0 + bc\sin\varphi_0\sin\theta_0.$$

Die darin enthaltenen Kreisfunktionen formen wir mittels der Lösungen trigonometrisch um:

$$\sin\theta_0 = \frac{ab}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}; \qquad \cos\theta_0 = \frac{c\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}};$$
$$\sin\varphi_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \qquad \cos\varphi_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

womit sich für die Funktionaldeterminante der folgende Ausdruck ergibt:

$$D(\theta_0,\varphi_0)=\begin{vmatrix} -\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{b^2c^2+c^2a^2}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}} \end{vmatrix}$$
$$=b^2c^2+c^2a^2>0.$$

Wegen

$$\frac{\partial^2 S}{\partial\theta^2}(\theta_0,\varphi_0)=-\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}<0$$

hat die projizierte Fläche

$$S(\theta_0,\varphi_0)=ab\sin\theta_0+ac\sin\varphi_0\cos\theta_0+bc\cos\varphi_0\cos\theta_0$$

im gestrichenen System an der Stelle (θ_0,φ_0) ein relatives Maximum. Setzen wir die oben angegebenen Kreisfunktionen in diese Formel ein, erhalten wir einen Ausdruck, der einer Erweiterung des Satzes des Pythagoras auf den dreidimensionalen Raum gleichkommt, welcher besagt: Das Quadrat der projizierten Fläche eines Quaders auf eine zur Blickrichtung senkrechte Ebene ist gleich der Summe der Quadrate der drei sichtbaren Teilflächen dieses Quaders:

$$S(\theta_0,\varphi_0)=\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

Dieser Ausdruck definiert als Schnittmenge zweier Flächen, einmal eines Kegels mit konstantem Scheitelwinkel, der unserer Elevation entspricht, und zum andern einer Ebene senkrecht zur x-y-Ebene, die konstanten Azimut besitzt, genau diejenige Gerade im Raum, von deren Punkten aus der Quader jeweils mit der größtmöglichen Querschnittsfläche gesehen werden kann, und zwar unabhängig von der Entfernung des Objekts. Der Durchstoßpunkt durch die Flugfläche ist dann genau derjenige Ort, an dem man das Objekt auf einer Kugel mit Radius des Abstands am frühesten erkennt und identifizieren kann. Dieser Ort muß nicht derjenige sein, der am schnellsten erreicht werden kann, um das Objekt identifizieren zu können, jedoch geschieht dann die Identifizierung aus geringerem Abstand heraus, mit der Konsequenz, daß man auch selbst früher erkannt und identifiziert werden kann. Bei festem θ_0 hängt die projizierte Fläche nur noch vom Azimutwinkel ab, d.h.

$$S(\varphi)=\frac{a^2b^2+c^2\sqrt{a^2+b^2}\left(a|\sin\varphi|+b|\cos\varphi|\right)}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}.$$

Der Zylinder mit dem Konuswinkel θ_0 schneidet die Ebenen $z=h$ und $\varphi=\varphi_0$ in genau zwei Punkten (x_0,y_0,z_0) und $(-x_0,-y_0,z_0)$, siehe Abbildung 3, wobei

$$x_0 = \rho_0 \cos\varphi_0 = h\tan\theta_0 \cos\varphi_0,$$
$$y_0 = \rho_0 \sin\varphi_0 = h\tan\theta_0 \sin\varphi_0,$$
$$z_0 = h.$$

Die darin vorkommenden Winkelfunktionen sind reine Funktionen von *a*, *b* und *c*:

$$\cos\varphi_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \tan\theta_0 = \frac{ab}{c\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Damit erhalten wir die kartesischen Koordinaten der Schnittpunkte

$$x_0 = \pm\frac{ab^2}{c}\frac{h}{a^2+b^2}, \quad y_0 = \pm\frac{a^2 b}{c}\frac{h}{a^2+b^2}, \quad z_0 = h.$$

Mit den Basisvektoren des aufgespannten Quaders

$$\vec{a} = (5,\,0,\,0), \quad \vec{b} = (0,\,4,\,0), \quad \vec{c} = (0,\,0,\,3)$$

und der Höhe $h = 1000$ m ergeben sich als Schnittmenge aller drei Flächen folgende Zahlenwerte:

$$x_0 = \pm 650{,}4\ \text{m}; \quad y_0 = \pm 813\ \text{m}; \quad z_0 = 1000\ \text{m};$$
$$\rho_0 = 1041{,}2\ \text{m} \quad \varphi_0 = \pm 51{,}3°; \quad \theta_0 = 46{,}2°.$$

Der geometrische Ort dieser Schnittpunkte ist in Abbildung 3 dargestellt.

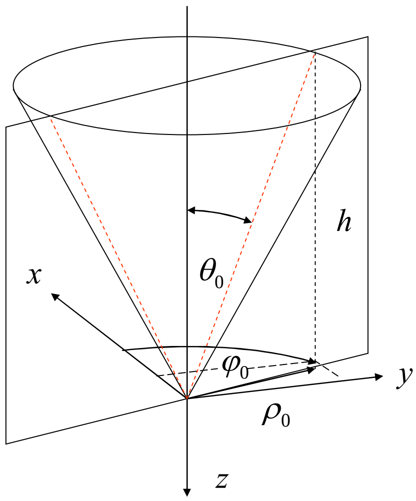

Abbildung 3. Geometrischer Ort optimaler Identifizierungsbedingungen

Im allgemeinen Fall einer Bewegung um 360° im Azimut sind allerdings die Vorzeichen von Sinus und Kosinus zu berücksichtigen:

$$S(\theta,\varphi) = ab\sin\theta + ac\cos\theta\left|\sin\varphi\right| + bc\cos\theta\left|\cos\varphi\right|.$$

Da sich das Objekt im System des Sensors um die z'-Achse dreht, unterliegt auch die projizierte Fläche gewissen Schwankungen, die es noch auszuloten gilt. Zunächst dazu in Tabelle 1 einige typische Grenz- und Mittelwerte:

	$\varphi = 0°$	$\varphi = 30°$	$\varphi = 45°$	$\varphi = 60°$	$\varphi = 90°$
$\theta = 0°$	12 m²	17,9 m²	19,1 m²	19,0 m²	15 m²
$\theta = 30°$	20,4 m²	25,5 m²	26,5 m²	26,4 m²	22,9 m²
$\theta = 45°$	22,6 m²	26,8 m²	27,6 m²	27,6 m²	24,7 m²
$\theta = 60°$	23,3 m²	26,3 m²	26,9 m²	26,8 m²	24,8 m²
$\theta = 90°$	20 m²	20 m²	20 m²	20 m²	20 m²

Tabelle 1. Größe der projizierten Fläche für einige repräsentative Werte beider Variablen

Zum Vergleich hat der maximale Querschnitt für $\theta_0 = 46{,}2°$ und $\varphi_0 = 51{,}3°$ eine Fläche von 27,7 m². Nun zeigen wir noch, daß die projizierte Fläche für $\theta = 30°$ und 60° in allen Punkten kleiner ist als für θ_0. Speziell für diese zwei Neigungswinkel gilt im Falle

$$\theta = 30°: \quad S(\varphi) = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(ac|\sin\varphi| + bc|\cos\varphi|\right),$$
$$\theta = 60°: \quad S(\varphi) = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(ac|\sin\varphi| + bc|\cos\varphi|\right).$$

Für den durch die drei Basisvektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Quader zeigen die in Abbildung 4 dargestellten Kurven für Winkel von 30°, 60° und 46,2°, daß die Größe der projizierten Fläche für nahezu alle Azimutwinkel weder von steileren noch von flacheren Elevationswinkeln als θ_0 übertroffen werden kann.

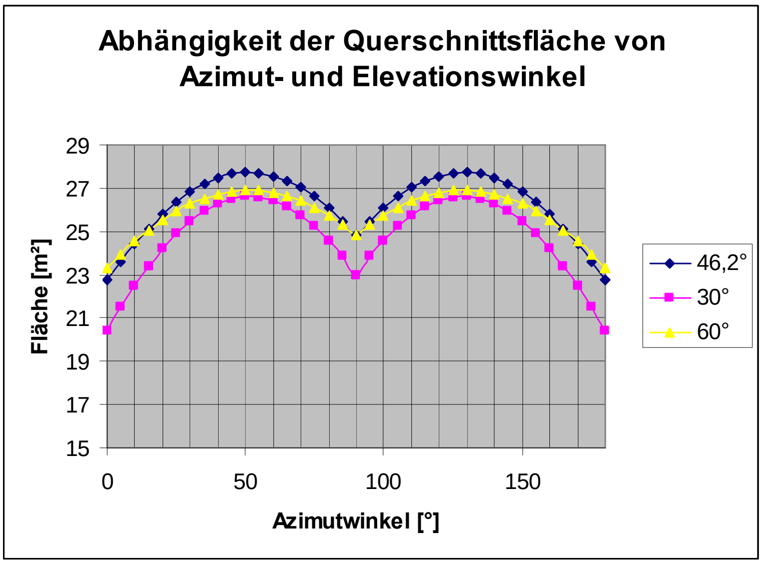

Abbildung 4. Abhängigkeit der Querschnittsfläche eines Quaders der Dimensionen (5 x 4 x 3) vom Blickwinkel in Azimut und Elevation

Somit wird auch verständlich, warum Greifvögel ihre Beute nicht überfliegen, sondern sie auf sich zusammenziehenden Spiralen umkreisen: weil sie sie schneller identifizieren können.