Aufgabe: In einem Land liegt die Geburtenrate mit 0,8 % pro Jahr niedriger als die Sterberate von 1,1 % pro Jahr. Das Durchschnittsalter der Bevölkerung liege bei 46,1 Jahren, die Lebenserwartung betrage 80 Jahre. Das Durchschnittsalter von Zuwanderern liege mit 35,2 Jahren deutlich niedriger als das der einheimischen Bevölkerung. Um die Zahl der Beitragszahler in die sozialen Sicherungssysteme konstant zu halten, gleicht die Regierung die rückläufige Bevölkerungsentwicklung durch genauso viele Zuwanderer aus wie Geburten fehlen.

Wie hoch müßte die Geburtenrate ohne Zuwanderung mindestens sein, damit sich das Durchschnittsalter der Bevölkerung im nächsten Jahr nicht erhöhen kann?

Welches mittlere Populationsalter ergibt sich allgemein und konkret ein Jahr nach Beginn der Zählung?

Um wie viele Jahre altert die Bevölkerung durch den Zuzug von Migranten langsamer als ohne, und was bedeutet das für die sozialen Sicherungssysteme?

Lösung: Das mittlere Populationsalter $\overline{\alpha}_1$ ist definiert als der arithmetische Altersmittelwert aller N_1 zum Zeitpunkt t_1 lebenden Menschen im Land:

$$\overline{\alpha}_1 = \frac{1}{N_1}\sum_{i=1}^{N_1}\alpha_i(t_1)$$

wobei $\alpha_i(t_1)$ das Alter des i ten Einzelnen zur Zeit t_1 ist und Element der natürlichen Zahlen, d.h. $\alpha_i \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Es werde angenommen, daß zur Zeit t_1 keine Geburt stattfindet. Das mittlere Populationsalter $\overline{\alpha}_2$ zur Zeit t_2 ist dann gegeben durch

$$\overline{\alpha}_2 = \frac{1}{N_2}\sum_{j=1}^{N_2}\alpha_j(t_2),$$

wobei sich die Zahl N_2 zusammensetzt aus der Zahl N_1 der zum Zeitpunkt t_1 Lebenden abzüglich der im Zeitraum $[t_1, t_2]$ Gestorbenen N_s plus den im gleichen Zeitraum Geborenen N_g, d.h.

$$N_2 = N_1 + N_g - N_s.$$

Sei $\gamma = N_g / N_1$ die Geburtenrate und $\sigma = N_s / N_1$ die Sterberate, dann gilt:

$$N_2 = N_1 + \gamma N_1 - \sigma N_1 = N_1(1 + \gamma - \sigma).$$

Da sämtliche im Zeitraum $t \in [t_1, t_2]$ Geborenen zur Zeit t_2 noch nicht das Alter 1 erreicht haben, die im gleichen Zeitraum Gestorbenen zum Alter nichts mehr beitragen und die zum Zeitpunkt t_2 noch am Leben Befindlichen um 1 Jahr gealtert sind, also das Alter

$$\alpha_i(t_2) = \alpha_i(t_1) + 1$$

erreicht haben, gilt

$$\overline{\alpha}_2 = \frac{1}{N_2} \sum_{j=1}^{N_1 - N_s} \left(\alpha_j(t_1) + 1\right).$$

Wir addieren nun das Alter der Gestorbenen dazu, um es anschließend wieder abzuziehen:

$$\overline{\alpha}_2 = \frac{1}{N_2}\left[\sum_{i=1}^{N_1}(\alpha_i(t_1)+1) - \sum_{j=1}^{N_s}\left(\alpha_j(t_1)+1\right)\right] = \frac{1}{N_2}\left[N_1(\overline{\alpha}_1 + 1) - \sum_{j=1}^{N_s}\alpha_j(t_1) - N_s\right]$$

Sei

$$\overline{\alpha}_s = \frac{1}{N_s}\sum_{k=1}^{N_s}\alpha_k(t_1)$$

die Lebenserwartung, also das mittlere Alter all derer, die das nächste Jahr nicht mehr erleben werden. Dann berechnet sich das nächste jährliche Durchschnittsalter zu

$$\overline{\alpha}_2 = \frac{N_1(\overline{\alpha}_1 + 1) - N_s(\overline{\alpha}_s + 1)}{N_1 + N_g - N_s}.$$

Damit sich das Durchschnittsalter im nächsten Jahr nicht erhöhen kann, müssen wir fordern: $\overline{\alpha}_2 = \overline{\alpha}_1$. Durch Gleichsetzung mit obigem Ausdruck folgt für die Geburtenrate:

$$\gamma \geq \frac{N_1 - N_s(\overline{\alpha}_s + 1 - \overline{\alpha}_1)}{N_1\overline{\alpha}_1} = \frac{1 - \sigma(\overline{\alpha}_s + 1 - \overline{\alpha}_1)}{\overline{\alpha}_1}.$$

Mit den Zahlenwerten der Aufgabe müßte die Geburtenrate bei mindestens 1,34 % liegen, also um 0,54 % höher sein als angegeben.

In relativen Einheiten schreiben wir das obige Ergebnis wie folgt:

$$\overline{\alpha}_2 = \frac{\overline{\alpha}_1 + 1 - \sigma(\overline{\alpha}_s + 1)}{1 + \gamma - \sigma}.$$

Mit den Zahlenangaben der Aufgabe erhalten wir daher im nächsten Jahr einen Anstieg des Durchschnittsalters um 0,25 Jahre auf 46,35 Jahre.

Da $\sigma - \gamma << 1$, erhalten wir für das mittlere Populationsalter näherungsweise den Ausdruck

$$\overline{\alpha}_2 \approx \overline{\alpha}_1 + 1 - \sigma(\overline{\alpha}_s + 1) + (\sigma - \gamma)[\overline{\alpha}_1 + 1 - \sigma(\overline{\alpha}_s + 1)].$$

Vernachlässigen wir auch noch Terme höherer Ordnung, so erhalten wir vereinfacht

$$\overline{\alpha}_2 \approx \overline{\alpha}_1 + 1 - \sigma(\overline{\alpha}_s + 1) + (\sigma - \gamma)(\overline{\alpha}_1 + 1).$$

Im Falle von Migration muß im Ausdruck für N_2 noch ein positiver Term N_m für den zusätzlichen Zuwachs hinzugefügt werden:

$$N_2 = N_1 + N_g - N_s + N_m.$$

In Raten ausgedrückt heißt das: $N_m = \mu N_1$, wobei μ die Netto-Immigrationsrate ist, in der Auswanderer bereits berücksichtigt sind. Daraus folgt:

$$N_2 = N_1 + \gamma N_1 - \sigma N_1 + \mu N_1 = N_1(1 + \gamma - \sigma + \mu).$$

Sei

$$\overline{\alpha}_m = \frac{1}{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \alpha_k(t_1)$$

die Zahl derer, die zwischen t_1 und t_2 eingewandert sind und zur Zeit t_1 das Alter $\alpha_k(t_1)$ hatten. Dann erhalten wir für das mittlere Populationsalter zur Zeit t_2 den Ausdruck

$$\overline{\alpha}_2 = \frac{1}{N_2}\left[N_1(\overline{\alpha}_1 + 1) - \sum_{j=1}^{N_s} \alpha_j(t_1) - N_s + \sum_{k=1}^{N_m} \alpha_k(t_1) + N_m\right] = \frac{N_1(\overline{\alpha}_1 + 1) - N_s(\overline{\alpha}_s + 1) + N_n(\overline{\alpha}_m + 1)}{N_1 + N_g - N_s + N_m},$$

der in Raten ausgedrückt lautet:

$$\overline{\alpha}_2 = \frac{\overline{\alpha}_1 + 1 - \sigma(\overline{\alpha}_s + 1) + \mu(\overline{\alpha}_m + 1)}{1 + \gamma - \sigma + \mu}.$$

Verwenden wir erneut die binomische Reihenentwicklung und brechen nach dem ersten Glied ab, so ergibt sich näherungsweise

$$\overline{\alpha}_2 \approx \overline{\alpha}_1 + 1 - \sigma(\overline{\alpha}_s + 1) + \mu(\overline{\alpha}_m + 1) + (\sigma - \gamma - \mu)[\overline{\alpha}_1 + 1 - \sigma(\overline{\alpha}_s + 1) + \mu(\overline{\alpha}_m + 1)].$$

Lassen wir in diesem Ausdruck Terme höherer Ordnung weg, erhalten wir schließlich

$$\overline{\alpha}_2 = \overline{\alpha}_1 + 1 - \sigma(\overline{\alpha}_s + 1) + (\sigma - \gamma - \mu)(\overline{\alpha}_1 + 1) + \mu(\overline{\alpha}_m + 1)$$

Ohne Migration $(\mu = 0)$ lautete unser eingangs hergeleiteter Ausdruck

$$\overline{\alpha}_2 = \overline{\alpha}_1 + 1 - \sigma(\overline{\alpha}_s + 1) + (\sigma - \gamma)(\overline{\alpha}_1 + 1).$$

Mit Netto-Immigration ergibt sich hingegen im Falle, daß die Zuwanderer die zu niedrige Geburtenrate ausgleichen, d.h. für $\mu = \sigma - \gamma$:

$$\overline{\alpha}_2 = \overline{\alpha}_1 + 1 - \sigma(\overline{\alpha}_s + 1) + (\sigma - \gamma)(\overline{\alpha}_m + 1),$$

so daß wir die beiden Terme $\overline{\alpha}_1 + 1$ und $\overline{\alpha}_m + 1$ gegeneinander abschätzen müssen. Falls die Stammpopulation älter ist als der Altersdurchschnitt der Migranten $(\alpha_1 > \alpha_m)$, so verjüngt sich die Gesamtpopulation nach einem Jahr mit den oben angegebenen Zahlen um 0,03 Jahre auf 46,32 Jahre anstatt des Anstiegs auf 46,35 Jahre ohne Zuzug. Das sind aufgerundet 12 Tage im Jahr, um die sich die Überalterung hinausschieben läßt.

Die Beitragszahler müssen also trotz Zuwanderung immer höhere Beiträge leisten, da die Überalterung in jedem Fall rascher voranschreitet, als sie ausgeglichen werden kann. Zuwanderung kann demnach die rückläufigen Geburten nicht ersetzen und damit steigende Beitragszahlungen auch nicht verhindern.